ISSN 1005-3085



中国工业与应用数学学会会刊

工程数学学报

CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

2007
第24卷 增刊二
Vol.24 Supp.2

工程数学学报编辑委员会

国家科技部中国科技论文统计源期刊
《中国期刊网》、万方数据库全文收录
《中国学术期刊(光盘版)》全文收录
《中文核心期刊要目总览》核心期刊
《中国科学引文数据库》来源期刊
《中国数学文摘》核心期刊
被俄罗斯《文摘杂志》(JA)检索
被美国《数学评论》(Math. Review)收录与评论
被德国 Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 检索
被美国数学学会(AMS)索引杂志 Current Mathematical Publications 检索

工程数学学报

Chinese Journal of Engineering Mathematics

(双月刊 1984 年创刊)
第 24 卷 增刊二 2007 年 12 月 30 日

(Bimonthly Started in 1984)
Vol.24 Supp.2 Dec. 30, 2007

主管部门：教育部
主办单位：西安交通大学
主　　编：李大潜
编　　辑：《工程数学学报》编辑委员会
出　　版：《工程数学学报》编辑部
地址：西安交通大学理学院
邮编：710049
电话：(029) 82667877
印刷单位：西安交通大学印刷厂
国内发行：《工程数学学报》编辑部
国外发行：中国出版对外贸易总公司
(北京 782 信箱) 邮编：100011
E-mail:jgsx@mail.xjtu.edu.cn

Supervised by: Ministry of Education
Sponsored by: Xi'an Jiaotong University
Editor-in-chief: Li Ta-tsien
Edited & Published by: Editorial Board of Chinese Journal of Engineering Mathematics, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University 710049
Tel. (86-029) 82667877
Printed by :The Printing House of Xi'an Jiaotong University
Distributed by: **(Domestic)** The Editorial Board of Chinese Journal of Engineering Mathematics
(Overseas) The China National Publishing Industry Trading Corporation
(P.O.Box 782,Beijing 100011)
E-mail:jgsx@mail.xjtu.edu.cn

ISSN 1005-3085
CN 61-1269/O1
定 价：16.00 元

工 程 数 学 学 报

GONGCHENG SHUXUE XUEBAO

第24卷 增 刊2

目 录

期刊基本参数CN61-1269/O1*1984*b*192*zh+en*P*￥16.00*3500*20*2007－12

第24卷 增刊2 工 程 数 学 学 报 Vol. 24 Supp.2
2007年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0001-30

2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛

姜启源

(清华大学，北京 100084)

由教育部高教司和中国工业与应用数学学会主办、高等教育出版社独家赞助的“2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛”于2007年9月21日至24日举行，来自全国30个省（市、自治区）969所院校的11742队参加了这项通讯比赛，比2006年的864所院校9985队有很大发展。

竞赛答卷首先在由省（市、自治区）形成的27个赛区和联合赛区（今年由内蒙、宁夏、青海组成）进行初评，评出各赛区的获奖者，然后各赛区按一定比例将优秀答卷送全国组委会，全国组委会聘请专家从中评出甲组全国一等奖199名，二等奖687名，乙组全国一等奖58名，二等奖152名。海军航空工程学院（青岛）的汤志高、王继利、曹莹瑛同学获（甲组）高教社杯，石家庄铁路职业技术学院的崔国富、刘贺、郝鹏志同学获（乙组）高教社杯。

我国的这项竞赛创办于1992年，每年一届，十几年来参赛规模以年均20%以上的速度增长，成为目前全国高校规模最大的课外科技活动。

这项竞赛之所以受到大学生们如此热烈的欢迎，是因为它有以下的特点：赛题由工程技术、管理科学等领域的实际问题简化加工而成，要求参赛者结合实际问题灵活运用数学和计算机软件以及其他学科的知识，通过建立、求解、评估、改善数学模型，充分发挥其聪明才智和创造精神；三名大学生组成一队，团结合作，选择一题在三天时间内完成一篇研究论文；可以自由地收集、查阅资料，调查研究，使用计算机、互联网和各种软件（但是不能与队外的任何人讨论赛题）；赛题没有事先确定的答案，论文评阅的标准是，假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和表述的清晰程度。

为了进一步加强竞赛规则的执行，促进竞赛的健康发展，要求参赛同学签名承诺：“我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。我们郑重承诺，严格遵守竞赛纪律，以保证竞赛的公平、公正性。如有违反竞赛规则的行为，我们将会受到严肃处理”。

今年A题由清华大学唐云教授提供，B题由吉林大学方沛辰和国防科技大学吴孟达教授提供，C题由解放军信息工程大学韩中庚教授提供，D题是根据首都医科大学刘雨林同学提供的素材加工的，在此一并表示感谢。为了更广泛、有效地收集适合竞赛的题目和素材，再次向全社会诚征赛题，有意者请与全国组委会办公室联系：100084北京清华大学数学科学系胡明娅，电话及传真(010)62781785，Email:mhu@math.tsinghua.edu.cn

为了与广大同学进行交流，对今后的竞赛予以适当引导，全国评阅专家组选择了一些优秀论文在本刊发表，并请命题者和评阅者撰文讲评。

发表的论文是同学们三天内写出的，为了保持原貌只作了适当的删节和文字上的修正，文章不可避免地存在着相当多的不妥之处，请读者谅解。

希望对这项竞赛作进一步了解的读者，请看：http://mcm.edu.cn

A题 中国人口增长预测

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》（附录1）还做出了进一步的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录2就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考附录2中的相关数据（也可以搜索相关文献和补充新的数据），建立中国人口增长的数学模型，并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出你们模型中的优点与不足之处。

附录1《国家人口发展战略研究报告》

附录2 人口数据（《中国人口统计年鉴》中的部分数据）及其说明

B题 乘公交，看奥运

我国人民翘首企盼的第29届奥运会明年8月将在北京举行，届时有大量观众到现场观看奥运比赛，其中大部分人将会乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）出行。这些年来，城市的公交系统有了很大发展，北京市的公交线路已达800条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，其核心是线路选择的模型与算法，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。请你们解决如下问题：

1. 仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用你们的模型与算法，求出以下6对起始站→终到站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）。

(1)、S3359→S1828　(2)、S1557→S0481　(3)、S0971→S0485
(4)、S0008→S0073　(5)、S0148→S0485　(6)、S0087→S3676

2. 同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3. 假设又知道所有站点之间的步行时间，请你给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

【附录1】 基本参数设定

相邻公汽站平均行驶时间（包括停站时间）：3分钟

相邻地铁站平均行驶时间（包括停站时间）：2.5分钟

公汽换乘公汽平均耗时：5分钟（其中步行时间2分钟）

地铁换乘地铁平均耗时：4分钟（其中步行时间2分钟）

地铁换乘公汽平均耗时：7分钟（其中步行时间4分钟）

公汽换乘地铁平均耗时：6分钟（其中步行时间4分钟）

公汽票价：分为单一票价与分段计价两种，标记于线路后；其中分段计价的票价为：0~20站：1元；21~40站：2元；40站以上：3元

地铁票价：3元（无论地铁线路间是否换乘）

注　以上参数均为简化问题而作的假设，未必与实际数据完全吻合。

【附录2】 公交线路及相关信息（见数据文件 B2007data.rar）

C题　手机“套餐”优惠几何

手机现已成为人们日常工作、社交、经营等社会活动中必备的工具之一，近年来通信业务量飞速增长（见附件1）。

手机资费问题一直是人们关心的热点问题，多少年来资费方案始终没有实质性变化。但是2007年1月以来上海、北京、广东等地的移动和联通两大运营商都相继推出了“手机单向收费方案”—各种品牌的“套餐”，手机“套餐”的花样琳琅满目，让人眼花缭乱。人们不禁要问：手机“套餐”究竟优惠几何？

请参照中国移动公司现行的资费标准和北京的全球通“畅听99套餐”、上海的“全球通68套餐”方案（见附件2），建立数学模型分析研究下列问题：

1）给出北京、上海各“套餐”方案的资费计算方法，并针对不同（通话量）需求的用户，分析说明各种“套餐”方案适应于什么样的用户？

2）提出你们对各种资费方案的评价准则和方法，据此对北京、上海推出的“套餐”方案与现行的资费标准作分析、比较，并给出评价。

3）北京移动公司2007年5月23日又推出了所谓的全球通“被叫全免费计划”方案，即月租50元，本地被叫免费，其他项目资费均同现行的资费标准，还要求用户至少在网一年。你们又如何评价这个方案？并说明理由。

4）如果移动公司聘请你们帮助设计一个全球通手机的资费方案，你们会考虑哪些因素？根据你们的研究结果和北京、上海的实际情况，在较现有“套餐”方案运营商的收入降低不超过10%的条件下，用数学建模方法设计一个你们认为合理的“套餐”方案。

附件1　2006年中国通信业的统计资料

附件2　中国移动手机的资费方案

D题　体能测试时间安排

某校按照教学计划安排各班学生进行体能测试，以了解学生的身体状况。测试包括身高与体重、立定跳远、肺活量、握力和台阶试验共5个项目，均由电子仪器自动测量、记录并保存信息。该校引进身高与体重测量仪器3台，立定跳远、肺活量测量仪器各1台，握力和台阶试验测量仪器各2台。

身高与体重、立定跳远、肺活量、握力4个项目每台仪器每个学生的平均测试（包括学生的转换）时间分别为10秒、20秒、20秒、15秒，台阶试验每台仪器一次测试5个学生，需要3分30秒。

每个学生测试每个项目前要录入个人信息，即学号，平均需时5秒。仪器在每个学生测量完毕后学号将自动后移一位，于是如果前后测试的学生学号相连，就可以省去录入时间，而同一班学生的学号是相连的。

学校安排每天的测试时间为8:00-12:10与13:30-16:45两个时间段。5项测试都在最多容纳150个学生的小型场所进行，测试项目没有固定的先后顺序。参加体能测试的各班人数见附表。

学校要求同一班的所有学生在同一时间段内完成所有项目的测试，并且在整个测试所需时间段数最少的条件下，尽量节省学生的等待时间。

请你用数学符号和语言表述各班测试时间安排问题，给出该数学问题的算法，尽量用清晰、直观的图表形式为学校工作人员及各班学生表示出测试时间的安排计划，并且说明该计划怎样满足学校的上述要求和条件。

最后，请对学校以后的体能测试就以下方面提出建议，并说明理由：如引进各项测量仪器的数量；测试场所的人员容量；一个班的学生是否需要分成几个组进行测试等。

附表：参加体能测试的各班人数

班号1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
人数	41	45	44	44	26	44	42	20	20	38	37	25	45	45	45
班号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
人数	44	20	30	39	35	38	38	28	25	30	36	20	24	32	33
班号	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
人数	41	33	51	39	20	20	44	37	38	39	42	40	37	50	50
班号	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56				
人数	42	43	41	42	45	42	19	39	75	17	17				

注　所有题目中的附件和附录见 http://mcm.edu.cn CUMCM 2007年竞赛题

2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛获奖名单

高教社杯获得者： 甲组：海军航空工程学院（青岛）　汤志高、王继利、曹莹瑛

乙组：石家庄铁路职业技术学院　崔国富、刘　贺、郝鹏志

甲组一等奖 199 名（排名以学校笔划为序）

序号	学　校	参赛队员			指导教师
1	三江学院	钱寅生	邢小强	崔玲玲	陈　涛
2	上海电力学院	王燕庆	王文谷	潘　俊	邓化宇
3	上海交通大学	王　雄	商　元	邵云峰	
4	大连大学	蔡桂方	饶崇涛	鹿　龙	刘自新
5	大连理工大学	赵　兴	孙　蕾	李云辉	教师组
6	大连理工大学	郝　帅	姜　珊	李蕴博	教师组
7	大连理工大学软件学院	胡志恒	于　菲	朱艳伟	李　哲
8	山东大学	王纬臻	赵　楠	马　龙	黄淑祥
9	山东大学	刘玉岗	周景博	徐金玉	刘保东
10	山东大学	孙宝臣	赵　琳	秦晓强	刘保东
11	山东大学	谭　蕾	周　赟	于振宇	刘保东
12	山东大学威海分校	于泉泉	肖东光	蔺海艳	穆增超
13	山东农业大学	宋江海	张莹莹	王慧敏	数模组
14	山东科技大学	杨红苟	张国振	张媛媛	庞善臣
15	山东科技大学	韩传余	石环环	钟圣荣	程惠东
16	山西大学	章生冬	王香文	刘子曜	杨　威
17	广东工业大学	陈水清	伍景润	阮拱照	涂钰青
18	广东工业大学	周小烈	廖汉伟	蔡秋鹏	郭大昌
19	广东金融学院	吴序秋	陈智伟	丘书俊	数模组
20	广东商学院	陈钦壮	林永波	陈穗滢	数模组

第24卷 增刊2　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0031-08

中国人口增长预测模型

郭 媛, 冯俊峰, 杨智超
指导教师: 贺祖国
(北京邮电大学，北京 100876)

编者按: 该文从不考虑性别、城乡差异的 Leslie 模型入手，逐步引入性别、城镇乡及城市化几个影响人口增长的重要因素。建模思路从简到繁，值得借鉴。该文的另一个特点是对预测结果的多方面综合利用加工，得到许多有用的派生结果，为决策提供了许多重要信息。

摘 要: 本文通过对我国人口基本国情的研究，从人口发展方程的离散形式(模型一)出发，提出基于性别的人口发展方程(模型二)，将男性和女性人口当作两个独立的发展系统。然后，我们进一步改进模型二并提出模型三–基于城镇化的人口修正预测，把城市、乡镇和农村作为三个系统，分别应用模型二，同时考虑这三个系统间的人口迁移，即由农村向城市和乡镇迁移，使城镇化比率符合当前社会规律。最后，以模型三为基础，我们分短期和长期研究了中国人口的未来发展走势，并对预测结果进行探讨得出了一些有意义的结论。

关键词: 人口发展模型; 总和生育率; 老龄化; 性别比; 城镇化

分类号: AMS(2000) 34B60　　中图分类号: O241.81　　文献标识码: A

1 问题分析

目前中国人口最突出的特点是：老龄化加速，出生人口性别比持续增高和乡村人口城镇化。要讨论这些问题，在人口的预测模型中必须将对象的年龄，性别，和所在地加以区分。因此可以选用转移矩阵来分析人口变化趋势，将人口按性别、年龄、所在地分组，通过转移矩阵迭代出下一年各组的人口数。这种模型能反映各年龄层、性别和地域的区别，并方便计算各种反映人口结构特点的指标。

按预测期长短，人口预测可分为短期预测(5年以下)，中期预测(5~20年)和长期预测(20~50年)。中短期预测的参数可以实际调查数据为基础，根据以往趋势加以估计，现实意义较大。长期预测中未知因素较多，不易把握，受政策的影响大。我们可以选定总和生育率、出生性别比和死亡率作为控制参数，对这些参数做出假设。基于不同的假设，我们可以得到不同的预测结果，进行比较。

2 模型假设

1. 在预测时间内，不发生大的疫情，灾难或战争等引起人口重大变化的事件；
2. 中短期内，总和生育率、死亡率和出生性别比不发生大的波动，以往年平均值代替预测值；
3. 长期人口预测的参数主要由政策决定；
4. 90岁以后各年龄的人口数较少，死亡率具有相同的特征，作为一组数据进行处理；
5. 生育模式在预测时间内保持不变，并且假设一胎只生一个；
6. 流动人口按城市和乡镇目前的人口总量的比例分别分配；
7. 流入流出人口不改变该地区的人口性别、年龄结构。

3 符号说明

m	最大年龄，在此视为90	$f_w(t)$	第 t 年出生的女婴
$x(i,t)$	第 t 年 i 岁的人数	$f_m(t)$	第 t 年出生的男婴
$k(i,t)$	第 t 年 i 岁的人口女性比	$\varphi(t)$	第 t 年的人口出生性别比
$x_m(i,t)$	第 t 年 i 岁的男性人数	$\beta(t)$	第 t 年每个育龄妇女平均生育的婴儿数，即总和生育率
$x_w(i,t)$	第 t 年 i 岁的女性人数		
$d(i,t)$	第 t 年 i 岁人口的死亡率	$h(i,t)$	第 t 年年龄为 i 周岁的女性生育模式，用以调整育龄妇女不同年龄生育率的高低
$d_m(i,t)$	第 t 年 i 岁男性的死亡率		
$d_w(i,t)$	第 t 年 i 岁女性的死亡率	$c(t)$	第 t 年的城镇化比率
$b(i,t)$	第 t 年 i 岁女性的生育率	$move(t)$	第 t 年的流动人口数
$f(t)$	第 t 年出生人口数	其中 $t=0,1,2\cdots$, $i=0,1,\cdots,m$	

4 模型建立

4.1 模型一：人口发展方程的离散形式即 Leslie 模型，参见文[1]

4.2 模型二：基于性别的人口发展方程

模型一假定男女死亡率相等，且未考虑新生儿的性别比例，不利于预测人口性别比例。本模型改进了 Leslie 模型，男性和女性的人口数作为两个独立的系统进行发展，总人口趋势由两者共同决定。以下标 w 表示女性人口，下标 m 表示男性人口。则女性人口发展的差分方程为

$$x_w(i+1,t+1)=[1-d_w(i,t)]x_w(i,t),\quad i=0,1,\cdots,m-1,\ t=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

第 t 年出生并存活下来的女婴数为

$$x_w(0,t)=\frac{100}{\varphi(t)+100}[1-d_{w0}(t)]\beta(t)\sum_{i=i_1}^{i_2}h(i,t)x_w(i,t), \tag{2}$$

其中 $\varphi(t)$ 为第 t 年的出生性别比，$d_{w0}(t)$ 为第 t 年出生但未活到人口统计时刻女婴比例。记

$$b'_w(i,t)=\frac{100}{\varphi(t)+100}[1-d_{w0}(t)][1-d_w(0,t)]h(i,t),$$

女性人口数量向量为 $X_w(t)$、出生率矩阵为 $B_w(t)$ 和存活率矩阵 $A_w(t)$ 与 Leslie 模型中的定义同形式，上述关系表述为

$$X_w(t+1)=A_w(t)X_w(t)+\beta(t)B_w(t)X_w(t), \tag{3}$$

同理可推导男性人口发展方程。总人口发展过程模型为

$$X(t+1)=X_w(t+1)+X_m(t+1). \tag{4}$$

4.3 模型三：基于城镇化的人口修正预测

模型二将男性和女性的人口数当作两个独立的系统进行研究，由此容易计算出不同性别、年龄的人口分布。但是模型二与模型一都基于一个重要假设：仅考虑出生率死亡率的影响，不计迁移等社会因素的影响，因而只适用于一个孤立的人口系统。

模型三以模型二为基础，把城市、乡镇和农村作为三个系统，分别应用模型二；同时考虑这三个系统间的人口迁移，即由农村向城、镇迁移，并保证城镇化比率符合当前社会规律。

记城市、乡镇和农村第 t 年 i 岁的人口数分别为 $xc(i,t)$, $xz(i,t)$, $xx(i,t)$，其他变量、矩阵都作类似定义，分别应用模型二。例如城市人口发展方程以矩阵形式表示为

$$\begin{aligned} XC(t+1) &= XC_w(t+1)+XC_m(t+1) \\ &= AC_w(t)XC_w(t)+\beta c(t)BC_w(t)XC_w(t)+AC_m(t)XC_m(t)+\beta c(t)BCm(t)XC_m(t), \end{aligned} \tag{5}$$

定义城镇化比率

$$城镇化=\frac{城镇人口}{全国人口}=\frac{城市人口+乡镇人口}{全国人口},$$

用数学符号表示为

$$c(t)=\frac{\sum_{i=0}^{90}[xc(i,t)+xz(i,t)]}{\sum_{i=0}^{90}[xc(i,t)+xz(i,t)+xx(i,t)]}, \tag{6}$$

$c(t)$ 表示城镇化比率随时间变化的函数，是由目前实际情况和今后政策所决定的。
由上式可推算出第 t 到第 $t+1$ 年间走出农村的流动人口数为

$$move(t)=\sum_{i=0}^{90}xx(i,t+1)-[1-c(t+1)]\sum_{i=0}^{90}[xc(i,t+1)+xz(i,t+1)+xx(i,t+1)], \tag{7}$$

按照假设6，流动人口按照城市和乡镇目前的人口总量的比例分配给它们，即流动人口并不改变城市与乡镇之间的总人口比例。各地区人口总量修正为

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{90}xc'(i,t+1)=\sum_{i=0}^{90}xc(i,t+1)+move(t)\frac{\sum_{i=0}^{90}xc(i,t+1)}{\sum_{i=0}^{90}[xc(i,t+1)+xz(i,t+1)]}, \\ \sum_{i=0}^{90}xz'(i,t+1)=\sum_{i=0}^{90}xz(i,t+1)+move(t)\frac{\sum_{i=0}^{90}xc(i,t+1)}{\sum_{i=0}^{90}[xc(i,t+1)+xz(i,t+1)]}, \\ \sum_{i=0}^{90}xx'(i,t+1)=\sum_{i=0}^{90}xx(i,t+1)-move(t). \end{cases} \tag{8}$$

再按照假设7，流入流出人口不改变该地区人口的性别比例、年龄结构，则修正后的人口分布与修正前相同，只是该地区的人口总量变化了。求解时，先确定函数 $c(t)$，逐年迭代计算出人口数量及分布，再进行流动人口修正，然后将修正后的结果继续迭代。

5　模型求解

以上三个模型中，模型三考虑最全面，易于根据模型分析人口趋势和指标，并且同时适用与中短期预测与长期预测。因此以下均按照模型三进行求解。

5.1　中短期预测与分析

5.1.1　模型参数计算

➢出生率

按照

$$\beta(t)=\sum_{i=i_1}^{i_2} b(i,t),$$

计算01~05各年总和生育率，列表如下(由于 SARS 的影响，03年数据出现异常，故求平均值是剔除了03年后的数据)：

表1: 历年总和生育率

	2001	2002	2003	2004	2005	平均值(剔除03)
城市	1.002	0.960	0.095	1.048	0.926	0.984
乡镇	1.189	1.203	0.132	1.347	1.278	1.254
农村	1.604	1.653	0.168	1.687	1.654	1.649

按各地区育龄妇女总数对 β 值加权平均，可以得到全国妇女总和生育率为1.375。根据国家计划，30年内应该把总和生育率控制在1.8以内才能将人口峰值控制在15亿。按照现在的总和生育率，并不需要再降低总和生育率。我们推测存在隐瞒黑户不报等状况，导致普查得到总和生育率低于实际值，中短期预测仍采用1.8作为全国妇女总和生育率。

由 $h(i,t)=\frac{b(i,t)}{\beta(t)}$ 可计算出生育模式 $h(i,t)$，以城市妇女为例，作图如下：

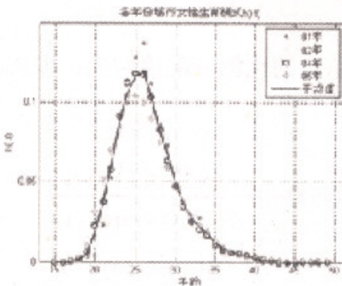


图1: 各年份城市女性生育模式图

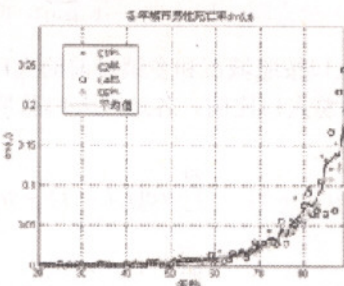


图2: 各年份城市男性死亡率

由上图可见生育模式很稳定，随年份波动很小。因此中短期预测中可以取其平均值作为生育模式。

➢ 死亡率

各地区人口死亡率随年龄变化的趋势是一致的，随着年龄的增大死亡率明显升高，年与年之间波动明显。资料显示随着医疗水平的提高，死亡率将按年份呈递减趋势。但是整体趋势变化非常缓慢，因此中短期预测取平均值代替。

➢ 城镇化比率

下表列出了1995年至2005年间的城镇化比例(数据来自国家统计局人口统计年鉴)：

表2: 城镇化比率(%)

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
城镇化	29.4	30.48	31.91	33.35	34.78	36.22	37.66	39.09	40.53	41.76	42.99

拟合结果为

$$c(t) = 1.41t - 2783.9, \tag{9}$$

可以看出城镇化比率随年份的发展呈现很强的线性趋势，残差水平为0.32，中短期内可采用线形模型预测城镇化比率。当然，长期预测使用线性模型不可行，否则农村人口将趋于0。长期预测中城镇化比率与政策相关，在以后的预测中将予以重新讨论。

5.1.2 人口增长趋势与城镇化的影响

下图为以2005年为起始年，根据模型得到的全国总人口和城镇乡各地人口趋势图：

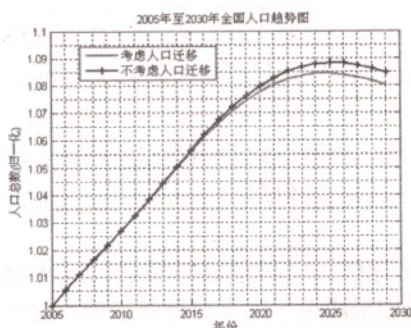


图3: 全国人口预测

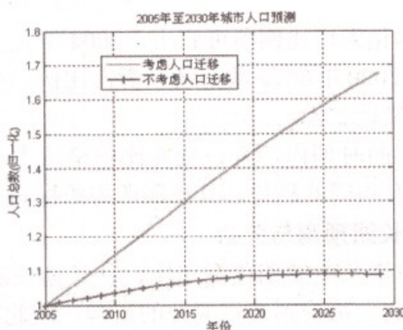


图4: 城市人口预测

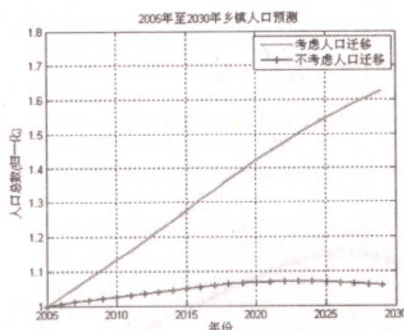


图5: 乡镇人口预测

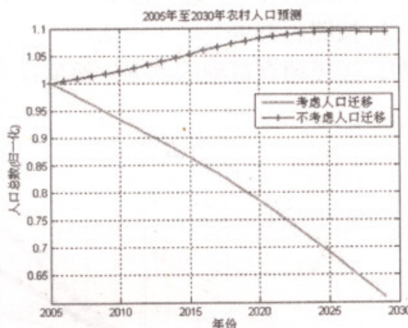


图6: 农村人口预测

按此预测，总人口在2010年，2020年分别达到13.43亿人和14.12亿人。在2025年人口数达到最大值，为14.23亿人。与国家人口发展战略研究课题组预测的数据相比，相同年份人口数偏小，人口最高峰出现年份提前。另外，市、镇人口数均呈现增加的趋势，而乡的人口数则随时间推移逐渐下降。市、镇人口数增加一方面来自于原住人口的自然增长，另一方面来自于城镇化导致人口数量的增加。农村人口减少则主要是由迁移造成的。

5.1.3 人口老龄化分析

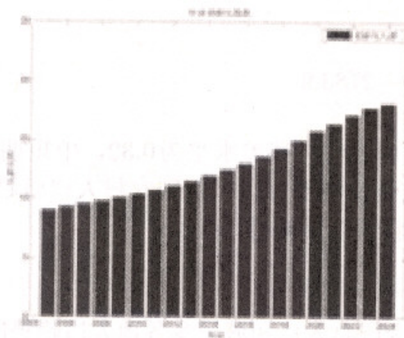


图7: 老龄人口比例随时间变化图

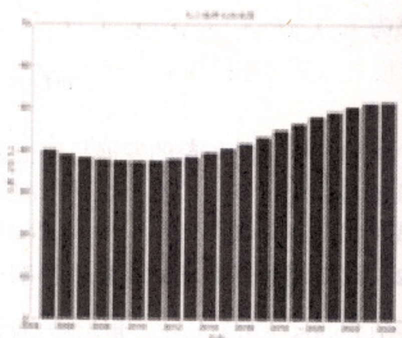


图8: 人口抚养比随时间变化图

由老龄化人口比例图可看出，2004年我国已处于老龄化社会阶段，且这一趋势还在进一步加强，到2020年65岁以上老人所占比例已高达15.1%，超出老年性社会标准的一倍。老年人口总数已接近2亿。

在未来的时期内，人口抚养比也呈增大趋势。预测得到的抚养比变化图与赛题附件1中给出的结果有相同的趋势，且预测所得的抚养率取值大致相同。

5.2 长期预测与分析

与人口增长中短期预测相比，在长期预测的模型中，更多的因素会影响预测的结果，且长期预测参数大都受到政策调控的影响，因此我们采用单一因素分析法，即在保持其它参数不变时，对某一关心的参数进行研究。并在最后综合各个因素，对人口进行长期的预测。

5.2.1 考虑总和生育率对人口增长的影响

对于总和生育率的取值，我们列出如下几种特殊情况予以讨论：

模式一：保持附件2中的近年总和生育率1.375；

模式二：按照附件1中建议值1.8；

模式三：按照生育更替水平值2.1；

模式四：按照调查得到的生育意愿值：农村1.8，城市1.56。

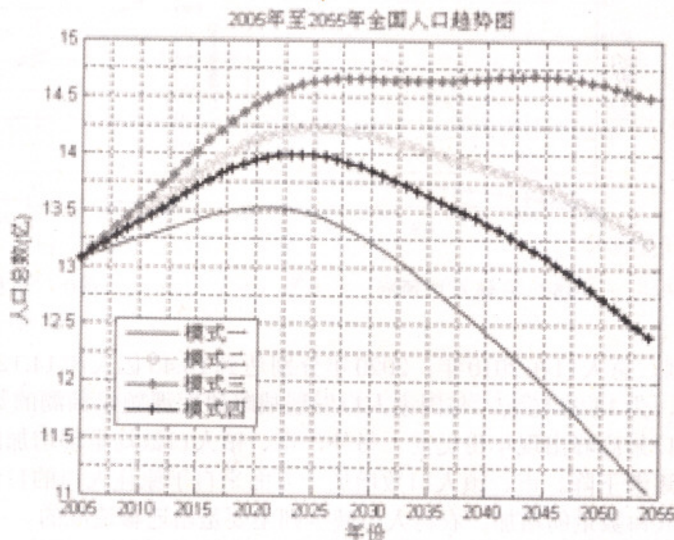


图9: 不同 β 值对全国总人口的影响

四个模式的人口发展趋势表明由于我国计划生育实行效果显著，在未来50年内人口都将显著减少。模式二是国家提倡的总和生育率。在经过缓慢上升后开始缓慢下降，并表现出一种稳定在某一值的态势。这一趋势最有利于人口的平稳过渡，既平衡了劳动力突然下降所造成的不良后果，又不会再产生太大的人口总数。模式三是一个生育更替稳定值，体现出本模型的合理性。

5.2.2　考虑城镇化对人口增长的影响

很明显我国城镇化进程不可能按照线性增长长期发展下去。据文献，到2020年，中国城镇化率将达到最大值，中国城镇化将逐渐变缓，最终进入城镇化比率为0.7~0.8的平稳区。鉴于上述特点我们采用 Logistic 曲线进行数据拟合，得到如下城镇化趋势的预测式

$$c(t)=\frac{0.75}{1+1.0443\mathrm{e}^{-0.0501t}},\tag{10}$$

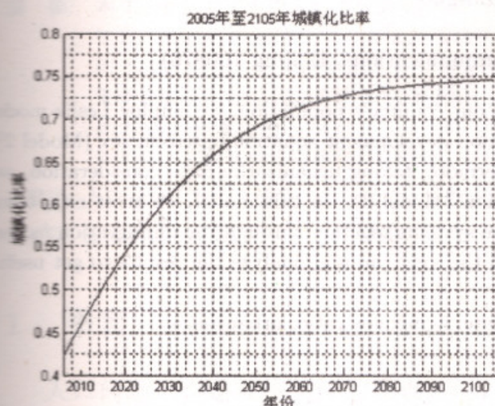


图10:　城镇化比率

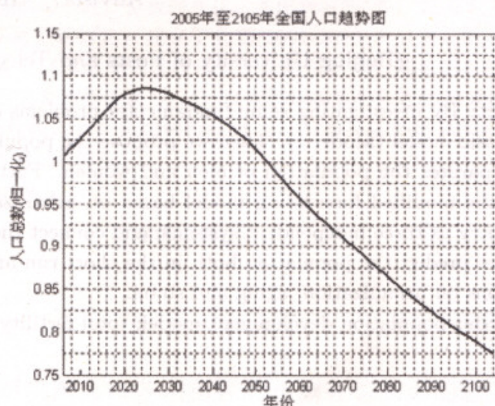


图11:　全国人口预测

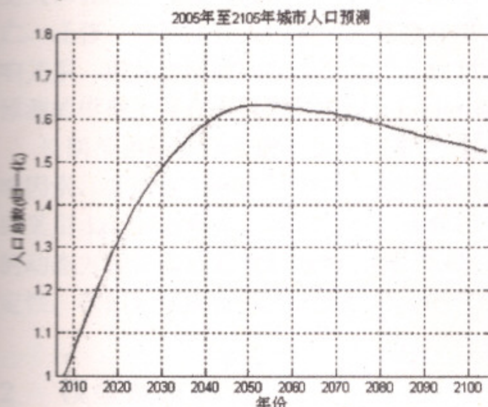


图12:　城市人口预测

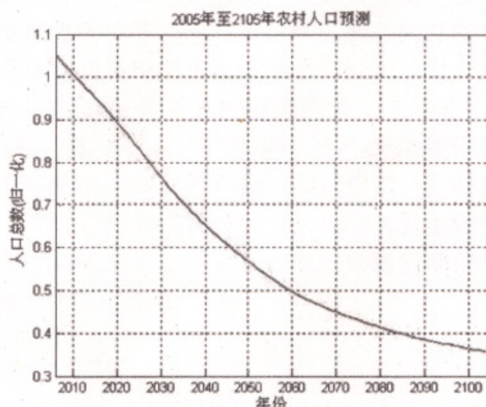


图13:　农村人口预测

从上图我们可以看到城镇化率不断提高到2100年左右时接近0.75，该数据是根据国家发展规划得到的。城镇人口则先增后减，体现出两个阶段的人口发展：第一阶段是2050年之前，城镇率的影响占据主要地位，大量的农村人口涌入到城市或由于许多农村发展而变成城镇人口。因此城市人口不断增加，乡镇人口净增长也成上升趋势，而农村人口则不断下降。第二阶段是2050年后一方面全国总人口数不断下降，城镇人口发展增速也不断减小，因此均呈现出下降趋势。

参考文献：

[1] 姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2003

[2] 国家统计局人口和就业统计司. 中国人口统计年鉴－2006[M]. 北京：中国统计出版社，2006

[3] 博客中国，以人为本，用科学的发展观看待人口问题[OL]
http://beijingdaxue.bokee.com/668260.html, 2005-02-03

[4] 人口发展“十一五”和2020年规划简介[OL]
http://www.hebrkjsw.gov.cn/xinxi/news/2007124/2007124170309.htm，2007-01

[5] 孙祥等. matlab 7.0基础教程[M]. 北京：清华大学出版社，2005

Forecasting Models about the Chinese Population Growth

GUO Yuan, FENG Jun-feng, YANG Zhi-chao
Advisor: HE Zu-guo

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: By investigating some fundamental problems of our country's population, we employ Leslie model as our basic model (Model 1). Then we propose the population development equation based on sex (Model 2), which separates the population of men and women. Furthermore, taking urbanization into consideration, we achieve the modified forecasting model based on urbanization (Model 3). In this model, we treat city, town and country as three independent systems, and connect these systems together through the immigration factor. Lastly, we predict the population both in the short run and the long run and analyze the results to get useful conclusions on urbanization, aging and so on.

Keywords: population development model; total fertility rate; aging; sex ratio; urbanization

第24卷 增刊2　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0039-08

基于 Leslie 模型的中国人口预测及蒙特卡罗仿真

陈　鹏，张成龙，高斯蒙
指导教师：梅长林
(西安交通大学，西安　710049)

编者按： 本文在 Leslie 模型的基础上加上迁移项，其参数的发展模型规范、合理。其最大的特色是加入蒙特卡罗仿真，进一步验证其合理性。

摘　要： 本文主要预测了中国人口增长情况及增长过程中相关人口指数的变化，考虑到城镇(市、镇)和农村在迁移、生育、死亡等方面的差异，本文对城镇和农村分别讨论，建立了长期(2001-2050)人口变化的带有迁移项的 Leslie 模型。进一步利用蒙特卡罗方法对人口动态变化过程进行了计算机仿真，其结果与模型求解结果吻合较好。在总和生育率为1.8的情况下的主要预测结果为：总人口在2038年左右达到14.9亿的峰值，到2050年回落至接近14亿；人口平均寿命升高，老龄化比例持续升高，2020年达到近20%，2050年达到35%；人口抚养比总体呈升高趋势，到2050接近70%。

关键词： 人口预测；Leslie 模型；人口迁移；蒙特卡罗仿真

分类号： AMS(2000) 62J10　　**中图分类号：** O212　　**文献标识码：** A

1　引言

人口问题一直是我国关注的焦点之一，对我国人口各项指标的预测有着深远的意义。我国的人口特点除了人口基数大，人口出生率持续偏高外，近年来有呈现出如老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高及乡村人口城镇化等新的特点。影响人口变化的因素众多，如出生、死亡、迁移、性别比、人口素质、社会环境、生育政策等等，同时各影响因素之间存在着相互影响关系，而且也随时间发生变化，导致预测模型尤其是长期预测模型难度较大。至今有关人口预测的模型主要有人口发展方程、Leslie 模型、Logistic 模型、回归分析等。

长期预测需综合考虑各影响因素。通过分析，本文以人口的生育、死亡、迁移作为主要影响因素，并通过 Leslie 模型将三种影响因素联系起来，确定扩展的 Leslie 模型。同时，本文分别采用 Logistic 模型，图形分析，函数拟合，概率密度分布等对以上三种因素做出随时间变化的动态方程，即参数发展方程，然后用差分方法求解。为了保证上述模型预测的准确性以及稳定性，我们采用蒙特卡罗计算机仿真的方法对上述模型进行检验。

2　模型及求解

2.1　基本假设

1) 我国看成一个封闭系统，即没有人口的迁入和迁出；
2) 人口增长只与人口基数、生育、死亡和迁移有关；
3) 国内人口迁移为农村向城市的单向迁入，且关于年龄的分布不随时间变化；
4) 我国城市化水平上限为现代发达国家最高城市化水平；
5) 90 岁以上人口统视为一个年龄段群体。

2.2 模型建立[1,2]

长期的人口预测必须考虑人口的出生、死亡、迁移等主要因素，为此我们以已知的 Leslie 模型为基础。通过建立带有迁移项的 Leslie 模型来解决相关问题。

取一岁为一个年龄段，一年为一个时段。设人口按年龄分组为0到 $n-1$ 岁及大于等于 n 岁者(n 岁以上视为同一年龄段)共 $n+1$ 个年龄段(这里 n 为90)。

设 $p_r^i(t)$、$d_r^i(t)$、$b_r^i(t)$、$h_r^i(t)$、$k_r^i(t)$、$v_r(t)$、$f_r(t)$ 分别表示 t 到 $t+1$ 年第 r 个年龄段总人口、人口死亡率、人口出生率、女性生育模式、女性性别比、净迁移人口、人口迁移率(迁移人口比总人口)，$R(t)$ 为第 t 年城市化水平(城市人口比总人口)。为了分别考察城镇、农村人口的发展，以上各参数上标 i 为1时代表城镇，为2是代表农村，以下各参数上标同此。

添加迁移项的 Leslie 模型建立如下

$$\begin{cases} P^i(t+1)=H^i(t)P^i(t)+\beta(t)B^i(t)P^i(t)+(-1)^{i+1}V(t), \\ P^i(0)=(p_0^i(0),p_1^i(0),\cdots,p_n^i(0))^T, \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$H^i(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-d_0^i(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-d_1^i(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-d_{n-1}^i(t) & 1-d_n^i(t) \end{pmatrix},$$

$$B^i(t)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{r_1}^i & \cdots & b_{r_m}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} p^i(t)=(p_0^i(t),p_1^i(t),\cdots,p_n^i(t))^T, \\ V(t)=(v_0(t),v_1(t),\cdots,v_n(t))^T, \\ v_r(t)=(R(t+1)-R(t))^*\sum_{r=0}^n(p_r^1(t)+p_r^2(t))f_r(t),\ r=(0,1,\cdots,n), \\ b_r^i(t)=(1-d_0^i(t))k_r^i(t)h_r^i(t),\ r=r_1,\cdots,r_m,\ \text{其中}\ [r_1,r_m]\ \text{为生育区间}. \end{cases} \tag{2}$$

如果可以确定时刻 t 各年龄段人口总数 $p_r^i(t)$，则可以确定总人口，老龄人口，人口抚养比等各类人口指标，由上述模型可知，除了人口初始值外还需要确定以下三项参数

1) 迁移项：$R(t)$、$f_r(t)$； 2) 死亡项：$d_r^i(t)$； 3) 生育项：$h_r^i(t)$、$k_r^i(t)$、$\beta(t)$。

为了分别考察城镇、农村人口的发展，以上各参数上标 i 为1时代表城镇，为2是代表农村。

2.3 模型中各参数的确定

2.3.1 迁移项分析

根据中国的发展现状，我们仅需要考虑从农村向城市迁入人口的变化情况。城市化水平随时间的的变化是表征人口迁移的重要指标；同时，为了对城乡劳动力人口和老龄人口作出准确

预测，迁移人口随年龄的分布也是确定人口迁移的重要因素。因此，本文分别从城市化水平和迁移人口随年龄的分布两方面对人口迁移作出预测。

1) 城市化水平的 Logistic 预测模型[3]

根据发达国家的城市化经历，一个国家或地区的城市化过程大致呈一条拉平的"s"形曲线。因为 Logistic 函数具有典型的"s"形曲线特征，同时含有"环境容纳量"和"内禀增长率"等较深刻的生物学意义，比较符合自然界和人类社会发展规律，因此本文选用 Logistic 模型来预测我国的城市化进程。模型的方程建立如下

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = kR(t)(R_{\max} - R(t)), \qquad (3)$$

其中 $R(t)$ 为城市化水平，即城市人口占总人口的比例，$R_{\max} = 0.85$(以发达国家现阶段城市化水平为参考，取值 0.85)为城市化水平制约项(环境容纳量)，k 为城市化水平增长率(内禀增长率)。

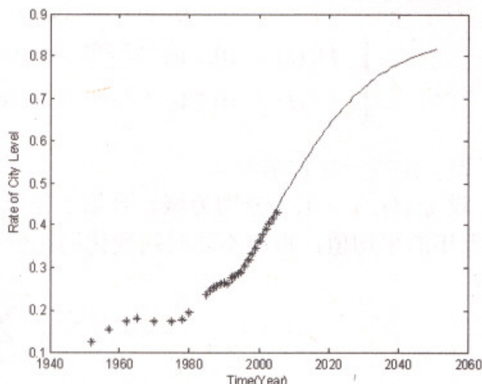


图 1: 我国城市化水平至2050年的预测

求解(3)得 $R(t) = \frac{0.85}{(1+0.85ce^{-0.85kt})}$，利用国家统计局对我国三十年来城市化水平的统计数据[4]，通过最小二乘法确定 $k = 0.080$，$c = 2.24$。预测结果如图 1

2) 年龄一迁移率分布

由基本假设3)，迁移率随年龄的分布不随时间变化，因此只需要确定某年迁移率随年龄的分布即可。取上海市2000年总体迁移人口中各年龄段人口所占比例为代表数据，借助 Matlab 拟合工具箱对数据做三项移动平均法平滑处理，根据方差分析经多次尝试后选取混合正态分布函数做最终拟合函数，归一化后如下

$$f_r(t) = 0.0305\mathrm{e}^{-\frac{(r-25.08)^2}{83.41}} + 0.0118\mathrm{e}^{-\frac{(r-27.57)^2}{669.77}}, \qquad (4)$$

拟合显著性判断参数为 SSE: 3.22、R-square: 0.9791。

2.3.2 死亡项分析

对人口死亡率的预测分为两个方面，一方面是总人口死亡情况随时间的变化关系，另一方面是不同年龄段人口死亡情况随时间的变化关系。

1) 城乡总人口死亡率[5]

建国以来，我国人口死亡率整体呈现下降趋势；改革开放以来，死亡率逐渐平缓，且呈现周期性的波动。因此，本文将总人口死亡率分解为趋势项和周期项两部分。总人口死亡函数建立为

$$D(t) = C(t) + T(t),$$

其中 $D(t)$ 为总人口死亡率，$C(t)$ 为趋势项，$T(t)$ 为周期项。由建国来总人口死亡率数据[4]，对趋势项进行负指数函数拟合得 $C(t) = 10.74\mathrm{e}^{-0.1026t} + 634$，拟合显著性判断参数 SSE: 1.648，R-square: 0.9893；对周期项进行三角函数拟合得 $T(t) = 0.039\sin(0.47t) + 0.029\cos(0.47t) + 0.062$，拟合显著性判断参数 SSE: 0.010、R-square: 0.6246。

设 $D_1(t)$, $D_2(t)$，分别为城镇人口死亡率和乡村人口死亡率，本文用总人口死亡率加上20年来[7]已知的两地区人口死亡率与总人口死亡率之差的平均值来代替两地区人口死亡率。即

$$D^i(t) = D(t) + \frac{1}{20}\sum_{t=1}^{20}(D^i(t) - D(t)), \quad i = 1, 2,$$

代入数据可得

$$\begin{cases} D^1(t) = 10.74\mathrm{e}^{-0.1026t} + 0.039\sin(0.47t) + 0.029\cos(0.47t) + 5.454, \\ D^2(t) = 10.74\mathrm{e}^{-0.1026t} + 0.039\sin(0.47t) + 0.029\cos(0.47t) + 6.765. \end{cases}$$

2) 年龄－死亡率分布

设 $g_r^i(t)$, $i = 1, 2$ 分别为城、乡第 t 年年龄为 r 的的死亡人口占城、乡总死亡人口的比例。取五年的平均值，得出不随时间变化的比例，表达式如下

$$g_r^i(t) = \frac{1}{5}\sum_{t=2001}^{2005} g_r^i(t), \quad i = 1, 2,$$

同时，该比例=该年龄段死亡人口÷总死亡人口，即

$$g_r^i(t) = \frac{d_r^i(t)p_r^i(t)}{\sum\limits_{t=2001}^{2005} d_r^i(t)p_r^i(t)}, \quad i = 1, 2,$$

综合以上两式，得年龄为 r 的人在第 t 年的死亡率=该年龄段死亡人口÷该年龄段总人口。

$$d_r^i(t) = \frac{g_r^i(r)D^i(t)P^i(t)}{p_r^i(t)}, \quad i = 1, 2.$$

2.3.3 生育项分析

对人口出生率的预测不仅要考虑育龄女性人口比例，也要考虑生育模式，即育龄女性的生育率随年龄的概率密度分布。

1) 育龄女性人口比例分析

对2001年至2005年五年内的育龄女性人口比例数据及其平均值绘图2分析可得；

1) 五年的育龄女性人口比例围绕平均值上下波动，但波动范围较小，波动随机性较强，波动规律不明显；

2) 育龄女性人口比例随年龄的分布虽然随着时间的变化而发生扰动，但扰动比较微弱，规律不显著。

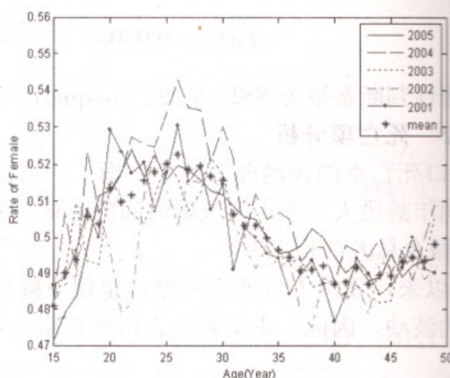


图 2: 育龄女性人口比例随年龄的分布关系

因此本文用五年内育龄女性人口比例的平均值作为对育龄女性人口比例的预测值。

2) 生育模式的确定

与1) 做同样分析，此处对生育模式(育龄妇女生育率)可取五年内的平均值作为预测值。鉴于生育模式图形(如图3)具有显著的 Γ 分布[6]的形状，本文构造 Γ 分布对生育模式进行预测。设

$$h_r = \frac{(r-r_1)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{r-r_1}{\theta}}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \quad r > r_1,$$

此处 h_r 为方程中 $h_r^i(t)$，非时间变量。其中 r_1 为15，$\theta = 2$，$\alpha = \frac{n}{2}$，$r_c = r_1 + n - 2$，其中 r_c 为最大概率值所对应的点，此时的分布化为 χ^2 分布。由矩估计法可得

$$n = E(r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(r_i - 15)$$

因为40岁以后的密度很小，几乎为0。这里我们忽略40岁以后的生育率影响可得，

$$n = E(r) = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(r_i - 15) = 13,$$

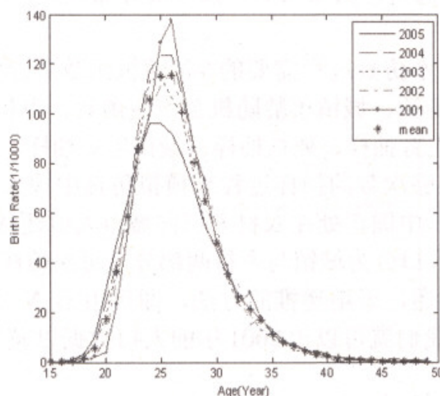


图 3: 2001-2005 年五年中市育龄女性生育率与年龄的关系图

进而可得 $r_c = 26$，由图3中平均值分布可以看出，最大概率值所对应的点为27，验证了该取法的正确性。最后可得

$$h_r = \frac{(r-15)^{5.5}\mathrm{e}^{-\frac{r-15}{2}}}{2^{6.5}\Gamma(6.5)}, \quad r > 15, \tag{7}$$

该分布的决定因子 r_1 在此处有特殊的含义，即最小生育年龄，不同的最小生育年龄可以带来不同的总和生育率，因此国家可以通过法律来规定 r_1 取值，从而可以有效实施计划生育。

2.4 模型求解

由各已知参数求解模型，根据求解结果可得到以下重要指标

1) 城市、农村及全国总人口

$$P(t) = \sum_{r=0}^{n}(p_r(t)). \tag{8}$$

2) 老龄化指数：未来某年 r_0 岁以上的老人占总人口的比例

$$\sigma(t) = \frac{\sum_{r=r_0}^{n}(p_r(t))}{P(t)}. \tag{9}$$

3) 人口扶养比：单位劳动力所能供养的非劳动力人口

$$\begin{cases} \rho(t) = \frac{P(t)-L(t)}{L(t)}, \\ L(t) = \sum_{r=l_1}^{l_2} p_r(t), \end{cases} \tag{10}$$

计算的具体结果见模型检验

3　蒙特卡罗方法[6]与计算机仿真对模型的检验

用蒙特卡罗方法仿真人口问题，根据现有的生育、生存、死亡、男女比例等统计资料，我们找出相应的概率分布，称其为概率分布函数。对每个人口样本，用一组随机数来模拟其发展，这个人口个体的集合就相当一组人口样本。分析这组样本，便可找出某些问题的解答。

3.1　蒙特卡罗人口仿真过程

首先，本仿真过程需要已知起始以及终止年份、生育率、时变死亡率、第一年的人口分布(包括总人口，男女人口，按年龄分布人口)、时变迁移率。这些条件在先前的论文中均已求出。

其次，本仿真过程需要的5种随机函数。分别是：出生概率随机数产生函数、死亡概率随机数产生函数、城镇年龄随机数产生函数、乡村年龄随机数产生函数、性别随机数产生函数以分别完成生育抽样、死亡抽样、城市年龄抽样、乡村年龄抽样以及性别抽样。

通过足够次数的抽样过程来模拟仿真中国人口的变化过程，每次抽样完成后进行人口结构调整。由于中国正处在农村人口向城市人口迁移的阶段，所以对人口迁移的考虑是必须的，这里把中国人口分为城镇与乡村两部分，每次抽样过后，还要进行因迁移而造成的人口调整。

综上所述，采用递推的方法，即可由第 N 年的人口数据信息推出 $N+1$ 年的人口数据信息。这样我们就可以由2001年的人口数据以及各种参数变化率的分布函数，推出往后每年的人口数据。

3.2　流程图

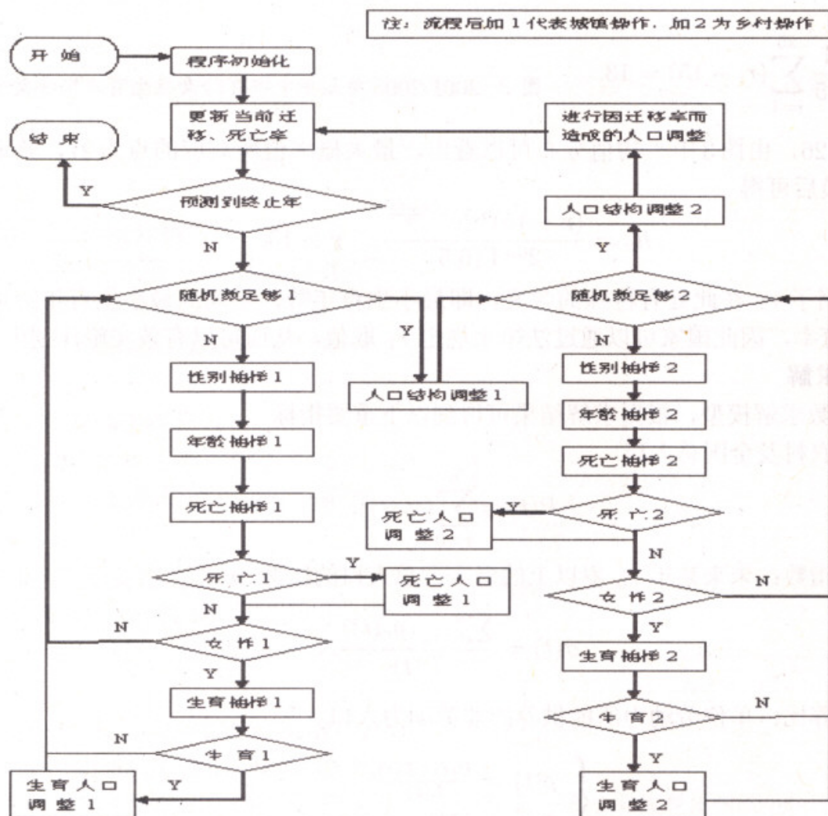


图4:　城镇、农村人口发展流程图

3.3 检验模型简析

由于此题是对中国人口进行仿真模拟，采用一般的模拟仿真方法时间效率不太理想，也不能够完全体现出统计学中随机的特点。这里采用了蒙特卡罗方法，不仅仅在时间效率上得到大大提高，更为重要的是，它可以通过改变其中一些参数的分布函数，来研究此参数对中国人口发展的影响。

3.4 模型及其检验结果

根据人口发展方程模型求解并与仿真结果作对比，对比图形如5，6，7

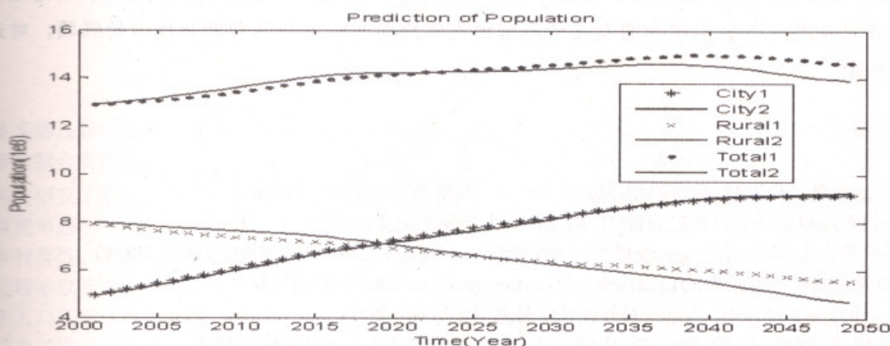


图5: 城镇、乡村和总人口预测及仿真结果

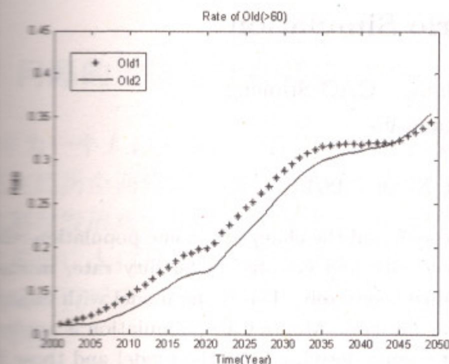


图6: 老龄化人口(超过60岁)比例预测与仿真结果

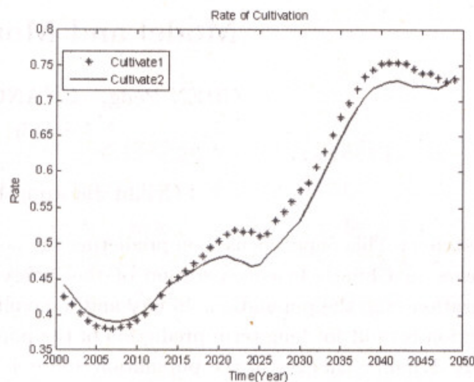


图7: 人口扶养比预测与仿真结果

4 模型评价

4.1 模型的优点与不足

本文在模型的选择、建立、求解和检验过程中有以下优点：

1) 本文充分考虑实际国情，对城、乡人口分别预测，结果涵盖了各主要人口指标。

2) 对人口的长期预测中，综合考虑了人口发展最主要的影响因素，并根据各影响因素的渐变特征做了较为实际的预测。

3) 本文借助蒙特卡罗随机仿真的方法对本文的主体模型进行了动态仿真和检验，检验结果良好；通过仿真，还可以灵活调整各种参数，从而对各种参数在人口发展中所起作用得到验

证。鉴于该问题的复杂性，本文模型也省略和简化了一些非重要影响参数，如人口的受教育水平，人口所处的自然和社会环境等；同时本文把一些难以确定但影响不大的参数(如育龄女性数量比例，死亡率在各年龄阶段的分布等)设为时间的不变量，难免产生一定的误差。

4.2 模型的推广

对人口的预测加入人口素质，政府政策，社会经济环境等影响因素，更加具体细致的预测未来人口的发展。本文所用到的函数拟合、Leslie 模型、Logistic 模型、蒙特卡罗随机仿真等方法在很多领域内都有广泛的应用。

致谢：本次竞赛得到西安交通大学的支助及各位指导老师的支持，在此表示我们由衷的感谢。教练梅长林老师、乔璐及其他各位同学和朋友在竞赛培训期间给与我们无私的帮助和细心的照顾，对此表达我们最真诚的感谢。

参考文献：

[1] 姜启源，谢金星，叶俊编. 数学模型-3版[M]. 北京：高等教育出版社，2003, 8
[2] 陈强. 人口系统模型及人口状况分析[J]. 南京理工大学硕士论文，2004, 3: 5-6
[3] 李百岁. 内蒙古人口城市化Logistic模型及其应用[J]. 干旱区自然与环境，2007, 21(2): 32-35
[4] 国家人口发展战略研究报告[OL]. www. Chinapop.gov.cn, 2007年9月25日
[5] 潘红宇. 时间序列分析[M]. 北京：对外经济贸易大学出版社，2005
[6] 施雨，李耀武. 概率论与数理统计应用-2版[M]. 西安：西安交通大学出版社，2005
[7] 杨耀臣. 蒙特卡罗方法与人口仿真学[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997, 7

Prediction of Chinese Population Based on the Leslie Model and Monte Carlo Simulation

CHEN Peng, ZHANG Cheng-long, GAO Si-meng
Advisor: MEI Chang-lin

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: This paper focuses on predicting the population growth and the changes of some population-related indexes in China. In consideration of the differences between city and country in fertility rate, mortality, migration etc., the populations in city and in country are studied separately. The Leslie model with migration function is built for long term prediction of the population. Furthermore, Monte Carlo Simulation is applied to study dynamic changes of the population and it is found that results deriving from the model and those from the simulation are very close. With the total fertility rate 1.8, our prediction is as follows: the total population in China will peak to 1.49 billion around 2038, and will drop to 1.4 billion in 2050; the Chinese life expectancy will increase; the percent of aged people will reach 20% in 2020 and 35% in 2050; the demographic dependency ratio will reach nearly 70%.

Keywords: population prediction; Leslie model; population migration; Monte Carlo simulation

第24卷 增刊2　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0047-07

中国人口区域结构向量模型

聂 磊, 陈 昆, 杨 慧
指导教师: 刘晓石
(四川大学，成都 610065)

编者按: 本文通过数据分析，找出了影响我国人口增长的主要因素，在此基础上建立合理的人口预测模型，对其中的参数拟合有特色，模型计算方法正确，结论可信，是一篇较好的数学建模参赛论文。

摘 要: 本文研究了影响人口的因素与我国人口变化之间的相互关系，对未来我国的人口增长趋势进行分析、预测。首先考虑区域和性别的差异，将我国人口的相关信息整合为由城市男性、城市女性、城镇男性、城镇女性、乡村男性、乡村女性组成的相关矩阵。在此基础上结合影响我国人口增长的，人口密度、生育率、死亡率、迁移率以及人口性别比等因素。综合这些因素并结合经典人口发展偏微分方程，通过完善和改进，建立了基于人口区域结构向量的一阶偏微分方程组模型。为了求解总模型中的三个未知向量分布函数，我们分别建立三个子模型：首先，对生育率数据进行曲线拟合建立了基于高斯分布的生育率分布函数子模型。其次，使用了指数分布和 Weibull 分布建立了死亡率分段函数子模型。再次，建立了理想化迁移率子模型。最后对方程进行离散化处理，运用计算机模拟方法求解。

关键词: 人口发展偏微分方程；人口区域结构向量模型；生存分析；计算机模拟

分类号: AMS(2000) 91D10　　中图分类号: O29　　文献标识码: A

1 问题的重述与社会背景

作为一个人口大国，一直以来我国的发展在一定程度上始终受到人口问题的制约。如今我国正在经历全面建设小康社会的快速转型期，人口发展面临着前所未有的复杂局面。为了全面落实科学发展观、实现低生育水平、提高人口素质、改善人口结构、引导人口合理分布、保障人口安全、人口与经济社会资源环境的协调和可持续发展等目标[1]。现我们根据《国家人口发展战略研究报告》提供的相关分析以及《中国人口统计年鉴》中的部分数据，着重探讨了以下两个问题:

1) 分析给出的人口数据，找出它们之间的相互关系，建立中国人口增长的数学模型;
2) 利用建立起来的模型，对我国人口短期以及中长期的增长趋势进行预测。

2 基本假设

1) 假设除少数异常点外其余所给数据真实;
2) 假设所给数据中不包括港、澳、台的人口信息;
3) 假设人口只受我国国内的出生率、死亡率和迁移因素影响，不考虑国家间的移民;
4) 假设人口在城、镇、乡之间迁移后，它的生育率与死亡率函数立即发生相应改变;
5) 假设国内社会环境基本稳定，没有影响人口发展的重大军事事件和严重的流行性疾病以及自然灾害等。

3 符号说明

r：表示人的年龄 r_m：表示人的最大年龄 t：表示时间

以下所有角标当中 $i=1，2，3，4，5，6$

1代表城市男性(以下简记城男)， 2代表城市女性(以下简记城女)，

3代表城镇男性(以下简记镇男)， 4代表城镇女性(以下简记镇女)，

5代表乡村男性(以下简记乡男)， 6代表乡村女性(以下简记乡女)，

例如

$$P(r,t)=(p_1(r,t),p_2(r,t),p_3(r,t),p_4(r,t),p_5(r,t),p_6(r,t))^T.$$

$p_i(r,t)$：分别表示 t 时刻年龄为 r 的人口密度 $P(r,t)$：人口密度向量函数

$bir_i(r,t)$：分别表示 t 时刻年龄为 r 的生育率 $\mathrm{Bir}(r,t)$：生育率向量函数

$dea_i(r,t)$：分别表示 t 时刻年龄为 r 的死亡率 $\mathrm{Dea}(r,t)$：死亡率向量函数

$k_i(t)$：分别表示表示 t 时刻的新生婴儿死亡率 $K(t)$：新生婴儿死亡率向量函数

$tra_i(r,t)$：分别表示 t 时刻年龄为 r 的迁出率 $\mathrm{Tra}(r,t)$：迁移率向量函数

A：出生人口性别分配矩阵 $*$：表示两个向量的对应元素相乘

例如

$$A=(a_1,a_2,a_3)^T,\qquad B=(b_1,b_2,b_3)^T,$$

则

$$A*B=(a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3)^T.$$

4 模型的分析和建立

4.1 总体模型的分析与建立

首先考虑到我国城、镇、乡之间的生产生活水平存在较大差异，从而导致各个区域间的生育率、死亡率等人口信息存在差异性，另外受我国历史与传统影响，各区域内部的人口信息又存在男、女性别之间的差异性，为了避免不同区域、不同性别造成的影响，使模型的预测结果更为准确且符合我国实际情况，故将我国人口的各方面信息划分为城男、城女、镇男、镇女、乡男、乡女六部分。

其次经过仔细分析和结合相关理论资料，可以得到影响我国人口增长主要由于：人口密度、生育率、死亡率、人口数量、迁移率以及出生人口性别比因素这六方面因素。

综合以上分析，在已有的人口发展偏微分方程[2]的基础上，可得到在时刻 t，年龄在 $(r,r+\Delta r)$ 内的人数为 $P(r,t)$。经过时间 Δt 后，这些人的年龄在区间 $(r+\Delta r,r+\Delta r+\Delta t)$ 内，人数变为 $P(r+\Delta t,t+\Delta t)\Delta r$。并且在 t 时刻年龄为 r 的人数的变化只由在 Δt 时刻内年龄为 r 的死亡人数和迁移人数决定，并令 $\Delta r\to 0$，$\Delta t\to 0$，并结合边界条件，得到人口区域结构向量模型

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r}=-[Tra(r,t)+Dea(r,t)]*P(r,t),\\ P(0,t)=(1-K)*A\int_0^{r_m}Bir(r,t)*P(r,t)\mathrm{d}r,\\ P(r,0)=P_0(r), & t>0,\ 0<r<r_m,\\ P(r,t)=0, & t>r_m.\end{cases}\tag{1}$$

正常情况下，出生性别比是由生物学规律决定的，但是不同区域也呈现一定差异，保持在103~107之间，本文根据历史数据计算出平均出生人口性别，为了方便向量计算引入出生人口性别分配矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.528 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.541 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.459 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.545 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.455 \end{pmatrix}.$$

由于总体模型中生育率、死亡率、迁移率的向量函数未知，为了求解此模型，通过往年的数据分别建立生育率、死亡率、迁移率的经验模型。

4.2　生育率子模型的建立

由《年鉴》中的数据可以得到从2001到2005年的城、镇、乡的妇女生育率，运用 matlab 曲线拟合工具箱进行回归分析与数据拟合。综合分析多种拟合方式的试验效果后，得到高斯函数的拟合效果最为理想。故认为年龄为 r 的妇女的生育率函数近似为高斯函数

$$bir_j = a_j \mathrm{e}^{-((r-b_j)/c_j)^2}, \tag{2}$$

其中 a_j，b_j，c_j 作为参数，$j=1$，2，3，分别代表城、镇、乡。

求解参数 a_j，b_j，c_j 对提供的数据进行曲线参数拟合。拟合过程中对年龄进行归一化处理，即 $r=$实际年龄/100，例如30岁的妇女年龄为 $r=0.3$。最后得到2001年、2002年、2004年、2005年的参数拟合值(见表1)。由于《年鉴》所给数据在运用计算机进行回归时发现数据异常，故排除2003年的生育率数据。

表1：　生育率参数拟合值

区域	a	a的置信区间	b	b的置信区间	c	c的置信区间	R_2
城01	127.4	(119.3，135.6)	0.2595	(0.2573，0.2617)	0.0412	(0.0389，0.0451)	0.9695
镇01	150.4	(140.4，160.5)	0.2515	(0.2492，0.2538)	0.0415	(0.0331，0.0447)	0.9663
乡01	182.3	(163.6，201)	0.2464	(0.2425，0.2502)	0.0462	(0.0407，0.0517)	0.9194
城02	113.5	(107.9，119.2)	0.2598	(0.2579，0.2617)	0.0462	(0.0435，0.0488)	0.980
镇02	148.4	(136，160.7)	0.2476	(0.2446，0.2505)	0.0429	(0.0388，0.0470)	0.9480
乡02	177.2	(156.2，198.2)	0.2465	(0.2417，0.2512)	0.0492	(0.0425，0.0560)	0.8923
城04	123.6	(117.5，129.6)	0.2563	(0.2545，0.2582)	0.0458	(0.0432，0.0484)	0.9811
镇04	147.1	(135.7，158.4)	0.2479	(0.2448，0.2510)	0.0493	(0.0449，0.0536)	0.9525
乡04	167.1	(149.6，184.7)	0.2446	(0.2399，0.2493)	0.0546	(0.0480，0.0613)	0.9104
城05	95.85	(90.48,101.2)	0.2548	(0.2524,0.2572)	0.0527	(0.0493，0.0561)	0.9736
镇05	134.7	(121.5，148)	0.2412	(0.2372，0.2452)	0.0499	(0.0443，0.0556)	0.9226
乡05	154.9	(137.6，172.2)	0.2433	(0.238，0.2486)	0.0580	(0.0504，0.0656)	0.8965

对上面表格中的数据进行观察、分析，可以得到：从2001到2005年(不包括2003年)城、镇、乡的生育率函数中只有参数 a 在进行有规律性的变化，参数 b 和 c 基本不变。为求 a 的

规律，运用 SPSS 软件进行倒数曲线模型拟合后，可求得 a 随时间的变化方程如下

$$a_1 = 90.575 + 38.25/t, \qquad R^2 = 0.956, \tag{3}$$

$$a_2 = 134.283 + 18.031/t, \quad R^2 = 0.727, \tag{4}$$

$$a_3 = 153.448 + 31.796/t, \quad R^2 = 0.778. \tag{5}$$

由于根据这个倒数曲线模型求得 R^2 值都比较接近于1，从而说明 a 的方程与实际情况相符合，即随着我国社会经济的不断发展，人民生活状况的日益改善，我国城、镇、乡的生育率会逐渐降低并趋于一个稳定值。由于从2001到2005年(不包括2003年)城、镇、乡的生育率函数中参数 b 和 c 基本不变，所以对参数 b 和 c 取平均值；最后根据以上参数结果，利用常数变易法得到城、镇、乡在 t 时刻年龄为 r 的生育率函数，即有生育率模型

$$Bir(r,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (90.575 + 38.250/t)\mathrm{e}^{-((r-0.2576)/0.04665)^2} \\ 0 \\ (134.283 + 18.301/t)\mathrm{e}^{-((r-0.468)/0.04448)^2} \\ 0 \\ (153.448 + 31.796/t)\mathrm{e}^{-((r-0.2464)/0.0462)^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

本文利用数据对总体的分布形态作出推断，假设生育率服从高斯分布，根据样本值落在总体各个区间的频数与总体落在该区间的期望频数的差值构造服从卡方分布的 Pearson 统计量[3]，并利用 SPSS 软件得到卡方统计量的观测值，依据卡方分布表计算出观测值对应的概率 p 值为0.137。该 p 值大于显著性水平0.05，故认为样本服从高斯分布具有统计意义。

4.3　死亡率子模型的建立

以往研究的寿命分布，从本质上说是围绕失效率考虑的。

设随机变量 ξ 表示人的寿命，其分布函数为 $F(r)$ 表示寿命不超过 r 的概率。设 ξ 的分布密度为 $f(r)$，记寿命大于 r 的概率为 $R(r)$

$$R(r) = P(\xi > r) = 1 - F(r), \tag{7}$$

当某人在时刻 r 存活，但他在区间 $(r, r+\Delta r)$ 内死亡的概率为

$$P(\xi \le r + \Delta r | \xi > r) = \frac{F(r+\Delta r) - F(r)}{1 - F(r)} \approx \frac{f(r)\Delta r}{R(r)}, \tag{8}$$

并且考虑社会比较稳定和时间较短的情况下，死亡率与时间几乎无关，所以年龄为 r 的人的死亡率为

$$dea(r,t) = \frac{f(r)}{R(r)}. \tag{9}$$

1)　在青壮年期，人的死亡不是由人体自身的衰老所引起，而是由外界的大量随机因素引起，因此无记忆效应，因此青壮年时期的寿命分布服从指数分布[4]，由此可得该段死亡率为

$$dea(r,t) = \lambda, \tag{10}$$

为确保准确性，通过对青壮年期的死亡率与时间 t 的相关分析，分别采用了三个相关系数：Pearson 相关系数，Spearman 相关系数和 Kendall 相关系数对模型进行检验(见表2)。分

析表2数据，由于相关系数较低并且有显著意义，可以得出结论：青壮年时期的死亡率与时间几乎没有相关性，故求平均值即可。

表2: 城、镇、乡的青壮年期死亡率与时间 t 的相关性

	Pearson	p值	Spearman	p值	Kendall	p值
城男	0.096	0.251	0.171	0.004	0.232	0.005
城女	0.004	0.065	0.050	0.399	0.060	0.472
镇男	0.173	0.038	0.148	0.012	0.204	0.014
镇女	0.135	0.105	0.082	0.182	0.109	0.190
乡男	0.378	0.000	0.268	0.000	0.384	0.000
乡女	0.166	0.046	0.210	0.000	0.266	0.001

2) 在衰老期，由于人的死亡率主要由人体自身的衰老引起，所以它近似服从 Weibull 分布[5]，即有衰老期的死亡率(见公式(11))，根据公式(11)，结合相关数据运用 SPSS 软件进行曲线参数拟合，得到城男、城女、镇男、镇女、乡男、乡女的参数拟合值(见表3)

$$dea(r,t) = \lambda\alpha(\lambda r)^{\alpha-1}, \tag{11}$$

其中 $\alpha, \lambda > 0$ 为参数。

表3: 老期死亡率参数拟合值

	λ	λ 的95%置信区间	α	α 的95%置信区间	R^2
城男	1.559	（1.515，1.603）	8.793	（8.177，9.408）	0.861
城女	1.350	（1.323，1.377）	13.265	（12.174，14.356）	0.838
镇男	1.598	（1.507，1.689）	8.728	（7.564，9.891）	0.631
镇女	1.493	（1.451，1.535）	9.289	（8.549，10.028）	0.832
乡男	1.624	（1.591，1.656）	8.740	（8.343，9.136）	0.936
乡女	1.535	（1.510，1.560）	9.189	（8.800，9.578）	0.945

3) 新生婴儿死亡率的计算

由提供数据分析，观察可得新生婴儿死亡率与时间不相关，故分别求得城男、城女、镇男、镇女、乡男、乡女的新生婴儿死亡率的平均值。

由以上综合后得到了我国城男、城女、镇男、镇女、乡男、乡女的死亡率分段函数(见表4)。

表4: 死亡率分段函数

区域	新生婴儿死亡率	青壮年时期死亡率	衰老期死亡率
城男	6.1160	0.4479	$dea_1(r,t) = 13.71(1.559r)^{7.793}$
城女	6.3440	0.2983	$dea_2(r,t) = 17.91(1350r)^{12}$
镇男	6.4000	0.7566	$dea_3(r,t) = 13.95(1.598r)^{7.728}$
镇女	10.9900	0.6132	$dea_4(r,t) = 13.87(1.493r)^{8.289}$
乡男	19.3100	1.1561	$dea_5(r,t) = 14.19(1.624)^{7.74}$
乡女	23.9360	0.7401	$dea_6(r,t) = 14.11(1.535)^{8.189}$

4.4 迁移率子模型的建立

人口迁移和流动作为一种复杂的社会经济现象，对经济发展、人口分布起着重要影响。流动迁移率对生育率有着非常显著的影响，所以在进行人口预测时就必然要考虑迁移率。但由于人口迁移流动的概念界定和统计口径上的不同以及我国户籍制度等问题，加之各次普查和全国性的抽样调查得到的多是存量指标，故不能得到准确的人口迁移数据。所以按人口城镇化水平年均增长1个百分点计算。

5 模型求解与结果分析

5.1 计算机模拟求解

为方便计算，将时间离散化处理，变偏微分方程组(见公式(1))为差分方程组，用计算机进行模拟求解，算法如下：

1) 把2005年末的状态赋为初始状态，设置步长 s 为0.01年。

2) 通过递推方程，由 t 时刻的状态计算出 $t+s$ 时刻各个年龄段的状态。

3) 当时间 t 大于预测时间，则退出循环，输出结果，当时间 t 小于预测时间，则令 $t=t+s$，转到步骤2)。

5.2 口总数预测

短期预测方面，从2006年到2015年，我国人口总数净增长7000万，增长率达到5.3%，并且具有继续上涨趋势；中长期预测方面，我国人口总数在本世纪30年代左右达到峰值14.59亿，此后具有下降并趋于稳定的趋势。我国人口总数在2010年、在2020年、2030年、2040年分别达到13.59亿、14.44亿、14.52亿、14.14亿。

5.3 人口年龄结构预测

我国老龄化情况有逐年加剧的趋势，老年人口数量增多、老龄化速度快、高龄趋势明显。目前我国65岁以上老年人口已达1.078亿，占总人口的8.1%。到2016年左右，65岁以上老年人口将达到1.358亿人，比重增长到10%；到2027年左右，65岁以上的人口达到2.219亿，占总人口的15%。到2044年左右预计会形成老龄人口高峰平台，65岁以上老年人口达3.479亿人，比重突破25%；届时每4人中就有1名老年人。

5.4 城镇乡比例情况

我们城镇化水平在未来40年内将逐步提高，农村人口比例将缓慢减少，更多的乡村人口被城镇化。城镇化农村中人口中，大多数进入镇，少部分进入城，镇人口比例与城市人口比例相比较变化更为明显。

5.5 结果分析

将利用模型预测得到的人口总数结果与《国家人口发展战略研究报告》中的结果进行比较，发现短期内模型预测与报告结果几乎相同，但对于中长期预测，模型预测数据较报告提供数据略为偏小。经分析，主要原因是死亡率数据较少，无法得到死亡率与时间的相关规律，从而导致不能建立能较好符合实际的死亡率经验模型。

另外分析模型预测出的人口年龄结构和城镇乡人口比例与《报告》预测数据进行比较，发现二者基本相同，说明预测方法较为科学、预测准确率较高。

参考文献：

[1] 国家人口发展战略研究报告[OL]. www.chinapop.gov.cn，2007年9月23日

[2] 姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2003年

[3] 张红兵，贾来喜，李潞. SPSS宝典[M]. 北京：电子工业出版社，2007年

[4] 王林书. 几种新寿命分布类[J]. 应用数学学报，2004, 27(3): 397-406

[5] 费培之等. 数学模型实用教程[M]. 成都：四川大学出版社，2004年

[6] 何晓群，刘文卿. 应用回归分析[M]. 北京：中国人民大学出版社，2001年

Vector Model for the Regional Structure of China's Population

NIE Lei,　CHEN Kun,　YANG Hui

Advisor:　LIU Xiao-shi

(Sichuan University, Chengdu 610065)

Abstract: This paper studies the relationship between the factors that has an impact on the demographics and the changes of China's population. It can be used for analysis and prediction the trends of population growth in the future. Considering the regional and sexual differences, the relevant information of China's population is composed of urban males, urban females, town males, town females, rural males and rural females, all of which form a matrix. This division brings the population density, fertility, mortality, migration rate, sex ratio and other factors, which may affect China's population growth, into our consideration. Combining these factors with the classical partial differential equations for population development, we can establish the first order partial differential equation model. In order to solve three unknown vector distribution functions in the model, we set up three sub-models. Firstly by using the data of fertility to do a curve fitting, we establish the sub-model of fertility as a distribution function which is based on Gaussian function. Secondly, we use the exponential and Weibull distribution to set up the sub-model of mortality as a sectional function. Thirdly we establish the ideal sub-model of the migration rate. Finally, the function is discretized and solved through the computer simulation.

Keywords: partial differential equations of population development; vector model of the regional structure of the population; survival analysis; computer simulation

第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0054-07

丁克现象与中国人口增长

孙 蕾, 赵 兴, 李云辉

指导教师: 贺明峰

(大连理工大学创新实践学院, 大连 116023)

编者按: 论文在考虑人口发展的老龄化、性别比失调、人口城镇化等现象的同时,还考虑了丁克家庭现象。作者利用带迁移项的人口发展偏微分方程,通过仔细讨论确定各项系数,并离散化求解,预测了这些现象对我国人口发展的影响。

摘 要: 本文考虑到多孩生育政策区存在少育现象,引入扩展丁克现象概念,结合宋健-于景元的人口发展模型,建立城镇乡三个子模型,分别给出了生育模式、死亡率、人口迁移率等参数的确定方式。而对总和生育率函数,除考虑常规的相关因素之外,还通过引入体现扩展丁克现象的丁克系数来体现其对人口增长的负作用。利用上述模型,文章给出了现行政策下人口的预测值。预测结果表明了调整生育政策的必要性和紧迫性。为此,我们提出了两套政策调整方案,并做出了人口预测,其中特别讨论了丁克现象对人口发展的影响。

关键词: 宋健-于景元模型;丁克现象;总和生育率

分类号: AMS(2000) 91D10 **中图分类号:** O29 **文献标识码:** A

1 模型假设

1) 忽略国境间人口流动对人口统计的影响;
2) 短期为五十年左右,长期为一百年左右;
3) 不考虑所查统计数字中的人口漏报现象;
4) 不考虑各地方生育法规的灵活性政策对全国人口政策的影响;
5) 不考虑针对少数民族的特殊政策;
6) 不考虑多胞胎的情况;
7) 国内社会经济形势基本稳定;
8) 没有重大影响人口发展的社会政治事件和严重的流行性疾病、严重的自然灾害等。

2 人口增长产生的新情况

我国计划生育的人口政策在控制人口数量方面取得了非凡的成绩,但随着经济的发展,近年来中国的人口发展出现了一些新的情况[1-4],如人口老龄化日趋严重,出生人口性别比长期持续偏高,城镇人口数量激增等。丁克家庭主要是指夫妻双方有生育能力而自愿不生育的新型家庭模式。早在20世纪80年代,欧美发达国家就已盛行。我们考虑丁克家庭是一个社会现象,在一个国家的经济现代化进程中是不可避免的。在中国,由于城镇化进程的加快,子女在生活、教育等费用也在不断增加,有些多孩生育政策区也出现了少育现象。

3 模型的建立

宋健-于景元的人口发展模型,将我国人口发展状况的研究从定性分析引入定量分析,得

到了广泛的应用[6-8]。由于人口政策的变动和生育意愿、生育模式的改变，现今人口的生育模式、总和生育率等参数已经发生了巨大的变化，本文在宋健–于景元模型的基础上，重新考虑现在人口状况及生育观念的改变，特别考虑了丁克现象在中国对人口长期发展的影响。

3.1 宋健-于景元的人口发展方程

引起人口结构变化的三大因素是出生、死亡和迁移，宋健-于景元的人口发展方程描述了人口年龄结构与出生率、死亡率和迁移人口数的关系，从动力学角度反映了人口的变迁过程，其连续的人口发展方程为

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a,t)p(a,t)+g(a,t), \tag{1}$$

式中 $p(a,t)$ 为 t 年末年龄为 a 的人口密度分布，$p(a,t)=\frac{\partial N(a,t)}{\partial a}$,$N(a,t)$ 表示某地区 t 时刻年龄小于 a 的人口数。$\mu(a,t)$ 为 t 时刻年龄为 a 的死亡率。$g(a,t)$ 为某地区 t 时刻年龄 a 岁的人口净迁移数。下面给出式(1)的初始条件

$$\begin{cases} p(a,0)=p_0(a), \\ p(0,t)=\varphi(t), \end{cases} \tag{2}$$

式中

$$\varphi(t)=\beta(t)\int_{a_1}^{a_2+1}k(a,t)h(a,t)p(a,t)\mathrm{d}a,$$

a_1, a_2 分别代表育龄妇女年龄的上下极限，$\varphi(t)$ 表示连续情况下 t 时刻出生婴儿总数。$\beta(t)$ 为 t 时刻妇女平均生育率，即总和生育率。$h(a,t)$ 为妇女生育模式函数。$k(a,t)$ 为 t 时刻年龄为 a 岁的妇女人口比重[7]。

3.2 城、镇、乡三个子模型的确定

宋健-于景元模型中，作者提供了较为系统的方法进行人口预测。通过对有关数据的分析，我们发现城镇乡之间存在其自身人口增长的固有特性。因此本文将整个模型分为三个子模型：城市人口预测模型 $sys(1)$，城镇人口预测模型 $sys(2)$ 和乡村人口预测模型 $sys(3)$。这三个模型各自独立，却又因人口流动而互相联系：三者之间的人口迁移函数之和总为零。即存在如下关系

$$\begin{cases} sys(1): g(a,t)=\gamma_1 G(a,t), \\ sys(2): g(a,t)=\gamma_2 G(a,t), \\ sys(3): g(a,t)=\gamma_3 G(a,t), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $G(a,t)$ 为流动人口总量。假定年龄对人口流动的总比例没有太大影响，流入城市的人口数占全国人口流动总人数的比例为 γ_1 $(0<\gamma_1<1)$，镇人口流动数的人口数占全国人口流动总人数的比例为 $(0<\gamma_2<1)$，流出乡村的人口数占全国人口流动总人数的比例为 γ_3 $(-1<\gamma_3<0)$。且 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$。

3.3 人口发展方程参数函数的确定

育龄人口的确定 对研究人口发展来说，起作用的是处于生育期内女性人口所占的比例。育龄人口计算公式为

$$w(t)=\sum_{a=a_1}^{a_m}k(a,t)p(a,t), \tag{4}$$

其中 a_1 为生育最低年龄，a_m 为生育最高年龄。

总和生育率函数 总和生育率是反映人口生育水平的重要指标，是社会人口平均的意义下一个妇女在整个育龄区内的生育总数。本文从计划生育工作中遇到的实际情况出发，综合考虑现行生育政策、丁克现象等众多因素，对政策生育率和不同程度超生情况下的总和生育率进行推算和分析，对总和生育率给出了改进公式

$$\beta(t)=(1-b(t)-d(t))z_1(t)z_2(t)(1+c(t)), \tag{5}$$

其中 $b(t)$ 为不孕不育症的患病率，$d(t)$ 为扩展的丁克现象影响函数，$z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 分别为政策生育系数和生育缺陷政策性调整系数，$c(t)$ 为超生比率或称漏报比率。下面本文分项展开讨论。

不孕不育症的患病率 不孕不育症的患病率是指某时点或时区内，某人群中出现不孕不育症的百分率。可以通过普查或随机抽样得到该概率。为简化模型，我们认为不孕症患病率每年保持稳定，并且取 $b(t)=0.08$。

扩展的丁克现象影响系数 本文将由多孩生育政策区的少育现象与丁克现象统称为扩展的丁克现象，定义函数 $d(t)$ 为扩展的丁克现象影响系数(下文简称为丁克影响系数)。针对不同地区，丁克影响程度不同。但是通过丁克现象抑制人口增长的总趋势是一致的，并且丁克影响与人口增长呈负相关。在模型中我们针对城镇乡子系统分别给出了丁克影响系数

$$\begin{cases} sys(1): d(t)=0.05\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}, \\ sys(2): d(t)=0.04\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}, \\ sys(3): d(t)=0.03\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}. \end{cases} \tag{6}$$

政策生育系数和生育缺陷政策性调整系数 政策生育系数是体现生育政策的调控因子，不同的区域对应不同的生育政策。本模型选取城镇乡三个子系统，对应不同的生育政策：城市系统允许生一孩，镇系统允许生一孩半(第一胎为女孩的允许生第二胎)，乡村系统允许生两孩。生育缺陷政策性调整系数是指子女有生育缺陷的家庭政府给予一定的生育放宽政策，允许再生一胎。由于生育缺陷率是一定的，宏观来看，生育缺陷政策性调整系数就与政策生育系数相辅相成的。在我们的模型中，城镇乡三个子系统分别有不同的生育系数和对应的不同的育缺陷政策性调整系数。

$$\begin{cases} sys(1): z_1(t)=1; & z_2(t)=1.07, \\ sys(2): z_1(t)=1.483; & z_2(t)=1.05, \\ sys(3): z_1(t)=2; & z_2(t)=1. \end{cases} \tag{7}$$

对于一孩半政策(实行独女户生二孩)，政策生育系数还必须考虑到男女婴儿出生比例的影响：假设我国正常的出生性别比为 107 : 100，那么，实行一孩半政策的政策生育系数为 $100\div(100+107)+1=1.483$。

超生比率或称漏报比率 $c(t)$ 第五次人口普查前，由国家计生委组织实施的1990-2000年间漏报清理工作即发现1000万左右的漏报人口，平均每年大约漏报100万人。我们根据实际对城镇乡三个子系统分别给出了1%，30%，40%的漏报比率。在50年后三个系统的漏报比率均定义为零。

$$\begin{cases} sys(1): c(t)=1\%, t<2005; c(t)=0.01-0.0002(t-2005), t\le 2055; c(t)=0, t>2055, \\ sys(2): c(t)=30\%, t<2005; c(t)=0.3-0.006(t-2005), t\le 2055; c(t)=0, t>2055, \\ sys(3): c(t)=40\%, t<2005; c(t)=0.4-0.008(t-2005), t\le 2055; c(t)=0, t>2055. \end{cases} \tag{8}$$

从上文对总和生育率的影响因素的分析，我们直观的看到不育率 $b(t)$，丁克比率 $d(t)$ 和超生比率 $c(t)$ 是国家很难宏观控制的变量，而 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 为国家政策性调整的相关系数。假设医疗条件仍然无法大幅提高不育症的治愈率，在国家人口政策不变的情况下，丁克现象的不断凸现将渐渐成为影响我国总和生育率的主导因素之一。

总和生育率函数的确定 通过上面对影响总和生育率函数的参数的讨论，我们总结出了城镇乡三个子系统的总和生育率模型及中国人口总和生育率模型如下

$$\begin{cases} sys(1): \beta(t) = 1.0807(0.92 - 0.05\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}), \\ sys(2): \beta(t) = 2.024295(0.92 - 0.04\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}), \\ sys(3): \beta(t) = 2.8(0.92 - 0.03\mathrm{e}^{0.03(t-2000)}). \end{cases} \tag{9}$$

中国人口总和生育率模型为

$$\beta(t) = \eta_1\beta_1(t) + \eta_2\beta_2(t) + \eta_3\beta_3(t), \tag{10}$$

其中加权因子 $\eta_i(t) = w_i(t)/w(t)$，$i = 1, 2, 3$。分别代表城镇乡三个子系统中育龄妇女人口占中国育龄妇女总人口的比值，这个比值不仅与本系统的年龄结构有关，还与育龄人口的迁移规模有关。

生育模式函数 $h(a,t)$ 可以比较准确地用 χ^2 概率密度函数来刻画[5]。本文采用

$$h(a) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n(t)}{2}}\Gamma(\frac{n(t)}{2})}(a-a_1)^{\frac{n(t)}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{a-a_1}{2}}, & a \geq a_1, \\ 0, & a < a_1, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $a \in (15, 49)$，$a_1 = 15$。$n(t)$ 由下式确定，

$$n(t) = \begin{cases} n_0 + \frac{t-2000}{5}, & t \leq 2050, \\ n_0 + 10, & t > 2050. \end{cases} \tag{12}$$

根据城、镇、乡三个子系统的各自的生育特点分别建立生育模式函数。

$$\begin{cases} sys(1): h(t) = \chi^2(a-a_1, n(t)), & n_0 = 12, \\ sys(2): h(t) = \frac{1}{1.483}\chi^2(a-a_1, n(t)) + \frac{0.483}{1.483}(a-a_2, n(t)), & n_0 = 11, \\ sys(3): h(t) = \frac{1}{2}\chi^2(a-a_1, n(t)) + \frac{1}{2}\chi^2(a-a_2, n(t)), & n_0 = 10. \end{cases} \tag{13}$$

死亡率函数 在假定没有意外(战争、灾害等)的情况下同一年龄的死亡率在一定时间段内是一个比较恒定的量(每一年死亡率会递减0.00607%，足以忽略)，因此模型中认为死亡率函数是随年龄变化的函数。以2001年的人口数据为基础，我们计算出年龄别死亡率，得到了城镇乡年龄别死亡率图(图1)。

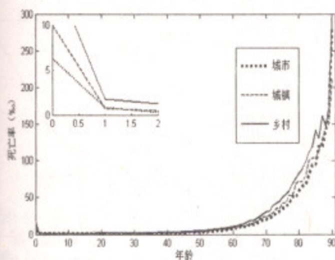


图1: 城镇乡年龄别死亡率

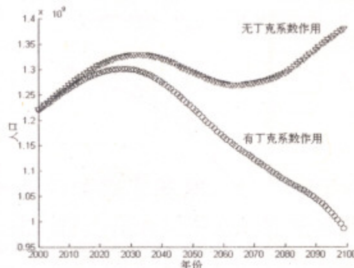


图2: 扩展丁克现象的影响

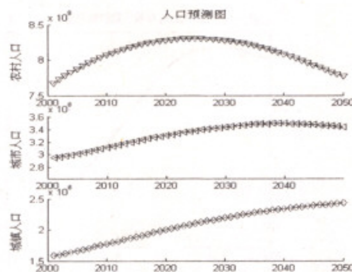


图3: 子系统人口预测图

由上图可以看出，在不同的子系统中年龄初始阶段和末期，三个子系统中的死亡率还存在着较大的差异。模型中我们用映射关系得到三个系统年龄与死亡率对应关系。

人口迁移函数 经过对多年的年龄别迁移率的对比分析，我们发现随时间变化迁移人口的年龄组成没有明显差异，但在数量上有逐年增长的趋势。我们利用 matlab 的优化工具箱中的 cftool 工具，将2002年各年龄段迁移数进行拟合，在置信区间为90%的基础上，得出拟和迁移函数。

$$g(a,t)=\begin{cases}1500(|a-30|+30)+(\sin(a)+\ln(t)/10), & a\in(0,60],\\ 1200\sin(a+t), & a=0;\quad a\in[60,90].\end{cases}\tag{14}$$

4 人口预测结果与分析

利用宋健-于景元模型(1)(2)的离散化形式[9]，并将(3)-(15)式确定的各参数进行相应的离散化，死亡率直接采用图1的离散结果，就可以通过编程进行相应的人口预测，得到的具体结果如下：

4.1 丁克现象的考虑与否对人口预测结果的影响

图2是丁克现象的考虑与否对人口预测结果影响的对比图。从人口走势图(图2)，我们能初步做出“中短期丁克现象对人口发展趋势有一定阻滞，长期丁克现象将对人口走势起到主导下降的作用”的判断。

中国人口大约在2010年左右不再按未考虑丁克现象的现有政策下人口发展预测进行增长，人口走势逐渐平稳下滑。这种现象可能会暂时缓解中国的人口压力。长期看来，中国人口受丁克现象的影响愈加明显，人口走势呈线性下降趋势。

4.2 城镇乡人口及总人口的长短期预测

中短期(至2050年)预测结果及分析 农村人口呈拱形发展趋势，因为城市经济发展迅猛引起城乡预期收入差异增大，导致农民迁移到城市的动机变强，流人城市的人口增多，从而农村人口又有回落。城镇人口呈明显上升趋势，是因为资源承载力等原因，个别大城市人口趋于饱和，人口密度大引起的住房紧张促使人口向城市周边地区转移。城市人口出现了缓慢上升趋于平缓的趋势，这是由于大量农民工的流入所致。由此可以看出，中国的城镇化速度非常快，虽然这在数值上平衡了一部分城市人口的缺失，但从长远看来，农民工的大量流入将使城市平均人口素质下降。

针对丁克现象和人口迁移两个人口影响因素的对比分析 在保持其它参数相同的条件下，为了进行对比研究，我们针对丁克现象和人口迁移分别进行了长期预测和短期预测，得到如图4的预测结果。

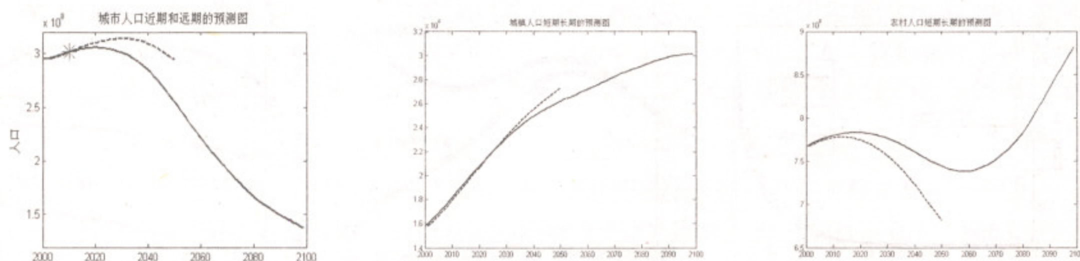


图4: 人口预测

图4中实线代表考虑丁克现象但未考虑迁移的长期预测结果，虚线代表考虑迁移。但未考虑丁克现象的中短期预测结果。由于实线与虚线考虑的是不同的两套参数变化，人口发展趋势自然会在一定的时间点上发生分叉。城镇乡三个子系统的分叉时间点各不相同，这说明丁克现象与人口迁移在不同的系统中影响人口发展的程度和其起主导作用的起始时间各不相同。

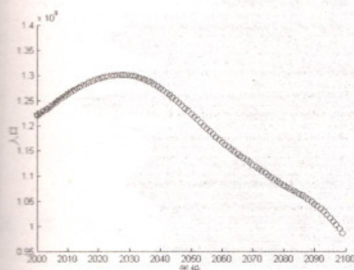


图5:　城镇乡年龄别死亡率

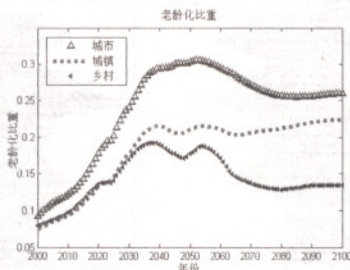


图6:　扩展丁克现象的影响

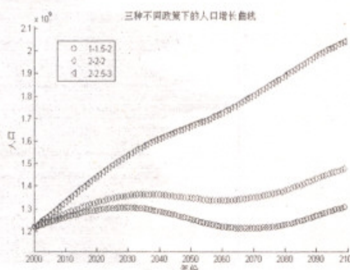


图7:　子系统人口预测图

长期(2050年至2100年)预测结果及分析

我们将分城镇乡的人口总量进行各年份上的加合，得出了人口总量长期预测图，结果表明，中国人口将在2035年达到人口高峰，随后平稳下降，长期看来中国人口总量大致呈线性下降趋势。

4.3　人口老龄化

由图6可知，城市、镇、乡村的老年人口比重在未来的50年内均在不断攀升，其中城市的老龄化程度最为严重，在2050年左右其老年人比重达到了现在的三倍以上，乡村和镇也均在2倍左右。我们分析在老龄化进程中起关键作用的因素就是总和生育率，城市因长期的低生育水平迎来了老年人口比重高峰。高峰之后，老年人比重有所下降，但仍然很高。

5　政策调整对人口发展预测结果的影响

基于上文对人口发展预测结果的分析，我们得出了“依照现行生育政策，中短期人口结构不协调，长期人口结构将严重失衡”的结论。对此我们尝试调整总和生育率函数中的政策生育系数，以试图弥补预测结果中人口发展不平衡的因素。总和生育率函数是随时间和政策变化的一个变量，为保证总和生育率处在人口健康发展的区间内，有必要随时间调整我国生育政策。然而生育政策的制定和执行有一定的延迟性，政策不能单纯是时间的函数。因此，为防止人口沿着模型中预测结果的走势发展下去，在中短期制定出新的生育政策是必要的。表1为现行政策与本文提出的两套政策调整方案。

表1:　政策调整方案

	现行政策	政策调整方案一	政策调整方案二
城市	一孩	两孩	两孩
镇	一孩半	两孩	两孩半
乡村	两孩	两孩	三孩

按照模型的规定进行模拟，对两种调整方案都得到了相应结果，图9是“普遍生育两孩”的生育政策对应的年龄结构分布图。对比图8和图9，可见新政策下年龄结构中低龄人数明显增加，使年龄结构更合理，说明适度回升的生育率，在稳定低生育水平的前提下改善了人口结构，人口总量也能够在正常范围内小幅波动。

第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0061-10

中国人口增长预测模型

杨海滨, 赵 翔, 黄魁华
指导教师: 指导教师组
(国防科技大学，长沙 410073)

摘 要: 本文结合控制论，运用系统工程的原理和方法，对中国人口增长这个复杂的社会现象加以定量研究。综合我国人口呈现的老龄化、城镇化加速，出生性别比升高等新特点，运用状态空间分析法，将人口发展分为年龄、生育和迁移过程，建立分区域分性别带迁移项的离散人口发展方程及其指标体系，并讨论方程参数的拟算方法。最后求解方程，给出分析结论并评价模型的优缺点。

关键词: 人口预测；改进人口发展方程；状态空间分析法；迁移模式

分类号: AMS(2000) 90C30　　**中图分类号:** O221　　**文献标识码:** A

1 引言

在我国现代化进程中，必须实现人口与经济、社会、资源、环境协调和可持续发展，进一步控制人口数量，提高人口质量，改善人口结构。现阶段，在感受计划生育政策带来的“人口红利”[1]的同时，中国依然面临人口结构性失调的严峻挑战，如老龄化进程加速、出生性别比持续走高，乡村人口城镇化加快等。因此，需要准确预测未来人口数量，为经济和社会发展决策提供科学依据。

为论述方便，并使得人口增长预测模型更具有针对性，给出如下基本假设：

1) 人口生存环境为一般常态的自然和社会环境；

2) 从净增长来看，只存在从乡村向城和镇两级行政区划的人口迁移；

3) 无重大毁灭性自然灾害和疾病，无战争等暴烈活动，即扰动人口发展的因素只有人口迁移；

4) 迁移到城镇的乡村人口在统计时刻到来前的前向死亡率与迁移前在乡村的死亡率相比，无显著变化。

2 分区域分性别带迁移项的人口增长预测离散模型

与现有模型相比，本文创新点主要体现在：一是，现有文献中关于人口增长的预测，基本上都是在全国层面上进行的，未进行分城乡预测[2]。而从我国国情来看，社会经济体系客观上存在城、镇、乡三元结构，且城乡之间的生育、死亡水平存在较大差异；同时城乡之间存在明显的人口迁移，分城、镇、乡进行人口预测更符合国情。二是，宋健等的离散人口模型是通过连续模型离散化得到的，本文从控制过程的角度，将人口视作一个系统，把人口发展过程分为年龄、生育和迁移过程，来推导离散人口发展模型。

2.1 人口系统的状态变量

设 t 时刻在 a 区域人口系统内满 i 岁但不足 $(i+1)$ 岁的 s 性人数为 $x_a^s(i,t)$，其中 $a\in\{c,t,v\}$，$s\in\{m,f\}$，$i=0,1,2,\cdots,m$，m 为系统中人口能活到的最大年龄。利

用 $x_a^s(1,t), x_a^s(2,t), \cdots, x_a^s(m,t)$ 这一组量就能完整描述人口系统。由于这是一组最小描述，因此可选定 $X(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)]^T$ 为人口系统的状态变量。

2.2 人口动态过程

在假设条件下，引起人口系统状态变化的三个基本要素是：生育、死亡和迁移，因而人口动态过程实际上就是反映在三个过程上，即年龄、生育和迁移过程。下面分析这三个过程，建立系统的状态空间模型。

1) 年龄过程

t 时刻年满 i 岁不足 $(i+1)$ 的人口，经过一年时间，减去期间死亡的人口，再加上期间由乡村迁入的满 i 岁不足 $(i+1)$ 的人口，就是 $(t+1)$ 时刻年满 $(i+1)$ 岁而不足 $(i+2)$ 的人口数。即

$$x_a^s(i+1,t+1)=[1-\mu_a^s(i,t)]x_a^s(i,t)+f_a^s(i,t), \tag{1}$$

其中 $a\in\{c,ts,v\}$，$c=$ 城 (City)，$t=$ 镇 (Township)，$v=$ 乡 (Village)；$s\in\{m,f\}$，$m=$ 男性 (Male)，$f=$ 女性 (Female)；$i=0,1,2,\cdots,m-1$。$x_a^s(i,t)$ 表示 t 时刻 a 区域的 i 足岁的 s 性人口数量；$\mu_a^s(i,t)$ 表示 t 时刻 a 区域的 i 足岁的 s 性人口的前向死亡率；$f_a^s(i,t)$ 表示 t 时刻 a 区域的 i 足岁的 s 性人口的迁移数量。

将式(1)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_a^s(1,t+1) \\ x_a^s(2,t+1) \\ \vdots \\ x_a^s(m,t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\mu_a^s(i,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\mu_a^s(2,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1-\mu_a^s(m-1,t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^s(1,t) \\ x_a^s(2,t) \\ \vdots \\ x_a^s(m,t) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} (1-\mu_a^s(0,t))x_a^s(0,t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_a^s(0,t) \\ f_a^s(1,t) \\ \vdots \\ f_a^s(m-1,t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中按龄死亡率 $\mu_a^s(i,t)$ 表示 a 区域 i 年龄组人口中在 t 年度内死亡人口所占的比率。它既是年龄和时间的函数，又是区域和性别的函数，反映了人口按区域按性别死亡的统计规律。当 t, a, s 固定时，$\mu_a^s(i,t)$ 随年龄变化图线呈马鞍状；当 i,a,s 固定时，$\mu_a^s(i,t)$ 随时间一般呈递减趋势，反映了医疗和生活水平的提高。

2) 生育过程

设 r_1 是系统内妇女最低生育年龄，r_2 为最高生育年龄，称 $[r_1,r_2]$ 为妇女的育龄区间，即妇女有生育能力的年龄段。定义育龄女性生育率 $b_a^s(i)$，$i\in[r_1,r_2]$，$b_a^s(i)\triangleq\frac{\Psi_a^s(i,t)}{x_a^f(i,t)}$，其中，$\Psi_a^s(i,t)$ 表示 t 年代 a 区域 i 岁妇女生育 s 性的婴儿数量，$i\in[r_1,r_2]$。于是

$$x_a^s(0,t)=(1-\mu_a^s(00,t))\Psi_a^s(t), \tag{3}$$

其中

$$\Psi_a^s(t)=\sum_{i=r_1}^{r_2}\Psi_a^s(i,t)=\sum_{i=r_1}^{r_2}b_a^s(i,t)x_a^f(i,t)=[0\cdots b_a^s(r_1,t)\cdots b_a^s(r_2,t)\cdots 0]\begin{bmatrix}x_a^f(1,t)\\x_a^f(2,t)\\\vdots\\x_a^f(m,t)\end{bmatrix},\quad(4)$$

将式(3)(4)代入式(2)右边第二项，得

$$\begin{bmatrix}(1-\mu_a^s(0,t))x_a^s(0,t)\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$=(1-\mu_a^s(0,t))(1-\mu_a^s(00,t))\begin{bmatrix}0&\cdots&b_a^s(r_1,t)&\cdots&b_a^s(r_2,t)&\cdots&0\\0&&&\cdots&&&0\\\vdots&&&\vdots&&&\vdots\\0&&&\cdots&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a^f(1,t)\\x_a^f(2,t)\\\vdots\\x_a^f(m,t)\end{bmatrix},(5)$$

记

$$\eta_a^s(0A)=(1-\mu_a^s(0,t))(1-\mu_a^s(00,t)),$$

$$\beta_a(t)\triangleq\sum_{i=r_1}^{r_2}n_a(i,t),\qquad h_a(i,t)\triangleq\frac{n_a(i,t)}{\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}n_a(i,t)},$$

其中 $n_a(i,t)$ 表示 t 年代 a 区域 i 岁妇女平均生育婴儿个数；$h_a(i,t)$ 称为 a 区域妇女的生育模式。$\beta_a(t)$ 为 t 年代 a 区域妇女的比生育率，即一个平稳人口系统中，a 区域一对夫妇终生生育婴儿数，或 t 年代 a 区域每个妇女平均生育婴儿数（据统计数据，当前我国城、镇、乡的 $\beta_a(t)$ 在计算时分别取定为 1.9，2.0，2.1 即可[4]）。于是

$$b_a^s(i,t)=S_a^s(t)\beta_a^s(t)h_a(i,t),\quad(6)$$

其中 $S_a^s(t)$ 表示 t 年代 a 区域 s 性出生婴儿占总出生婴儿数的比例。

将式(6)代入式(5)，从而有下式

$$\begin{bmatrix}(1-\mu_a^s(0,t))x_a^s(0,t)\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$=\eta_a^s(0A)\begin{bmatrix}0&\cdots&S_a^s(t)\beta_a^s(t)h_a(r_1,t)&\cdots&S_a^s(t)\beta_a^s(t)h_a(r_2,t)&\cdots&0\\0&&&\cdots&&&0\\\vdots&&&\vdots&&&\vdots\\0&&&\cdots&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a^f(1,t)\\x_a^f(2,t)\\\vdots\\x_a^f(m,t)\end{bmatrix},$$

写成向量形式有

$$X_a^s(t+1) = M_a^s(t)X_a^s(t) + \eta_a^s(0A)Y_a^s(t) + f_a^s(t), \tag{7}$$

其中

$$Y_a^s(t) = \beta_a(t)S_a^s(t)H_a^(t)X_a^f(t), \qquad H_a(t) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & h_a(r_1,t) & \cdots & h_a(r_2,t) & \cdots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_a^s(t) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\mu_a^s(i,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\mu_a^s(2,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1-\mu_a^s(m-1,t) & 0 \end{bmatrix}.$$

3) 迁移过程

本文所指的多区域就是城、镇、乡三个区域，乡村人口是指人口普查资料中的县级以下人口，城、镇人口是分别指人口普查资料中的城市人口和镇人口。乡村人口发展和城、镇人口发展既有联系又有区别，区别在于城乡人口规模、结构以及生育水平、死亡水平的显著性差异，而乡-城镇之间的人口迁移是连接城乡人口的纽带。

迁移过程，很大程度上缘于乡村人口的城镇化。参考生育过程式(3)，定义 $\Phi_a^s(i,t)$ 为 t 年代 a 区域迁入或迁出的总人数：当 $a=v$ 时，$\Phi_a^s(i,t)<0$；当 $a=c$ 或 t 时，$\Phi_a^s(i,t)>0$. 根据人口统计时刻人口总量守恒的原则，即乡村迁出人口等于城、镇迁入人口，

$$\begin{cases} \Phi_c^s(i,t) = (1-\lambda_v^s(t))\omega_v^s(i,t)\Phi_t^s(i,t), \\ \Phi_v^s(i,t) = \Phi_c^s(i,t) + \Phi_t^s(i,t). \end{cases}$$

为了揭示迁移人口与当地总人口的关系，引入迁移模式矩阵

$$W_v^s(t) \triangleq \begin{bmatrix} IR_v^s(0,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & IR_v^s(1,t) & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & IR_v^s(m,t) \end{bmatrix},$$

对于乡村来说，

$$f_a^s(t) = -f_v^s(t) = \begin{bmatrix} f_v^s(0,t) \\ f_v^s(1,t) \\ \vdots \\ f_v^s(m,t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} IR_v^s(0,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & IR_v^s(1,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & IR_v^s(m,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v^s(1,t) \\ x_v^s(2,t) \\ \vdots \\ x_v^s(m,t) \end{bmatrix} = -W_v^s(t)X_v^s(t). \tag{8}$$

将式(8)代入式(7)，得到乡村人口发展模型

$$X_v^s(t+1) = M_v^s(t)X_v^s(t) + \eta_v^s(0A)Y_v^s(t) + (-W_v^s(t)X_v^s(t)). \tag{9}$$

引入迁移人口留存矩阵

$$N_v^s(t) \triangleq \begin{bmatrix} 1-\lambda_v^s(1,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda_v^s(2,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 1-\lambda_v^s(m,t) \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_v^s(1,t)$ 表示 t 年代乡村的 s 性迁移人口在下一个统计时刻到来之前死亡的概率。根据前文的假设约定，$\lambda_v^s(1,t)=\mu_v^s(i,t)$。所以

$$N_v^s(t) \approx \begin{bmatrix} 1-\mu_v^s(0,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\mu_v^s(1,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 1-\mu_v^s(m,t) \end{bmatrix}.$$

定义迁移年龄模式

$$RC_c^s(t) \triangleq \begin{bmatrix} RC_c^s(0,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & RC_c^s(1,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & RC_c^s(m,t) \end{bmatrix},$$

它表示 t 年代 s 性乡村人口按年龄别从乡村迁移到城市的比率；其中

$$RC_c^s(i,t) \triangleq \frac{f_c^s(i,t)}{\sum\limits_{i=0}^{m} f_v^s(i,t)},$$

它表示 i 岁 s 性迁移到城市的乡村人口占 s 性迁移总人口的比率。参考专业统计资料，我们发现它与时间的依赖性较小，变化不显著，因此基于简化计算的考虑，可用已知的统计数据来估计它，即

$$RC_c^s(i,t) \approx \frac{f_c^s(i,t_0)}{\sum\limits_{i=0}^{m} f_v^s(i,t_0)}.$$

那么简单地，$RC_c^s(t) \approx RC_c^s(t_0)$。

所以，得到对于城市的人口发展模型

$$X_c^s(t+1) = M_c^s(t)X_c^s(t) + \eta_c^s(0A)Y_c^s(t) + N_v^s(t)RC_a^s(t_0)W_v^s(t)X_v^s(t). \tag{10}$$

同理，我们可以顺利得到对于镇的人口发展方程

$$X_{ts}^s(t+1) = M_{ts}^s(t)X_{ts}^s(t) + \eta_{ts}^s(0A)Y_{ts}^s(t) + N_{ts}^s(t)[I - RC_c^s(t_0)]W_{ts}^s(t)X_{ts}^s(t), \tag{11}$$

其中 I 为单位矩阵。至此，就推得了最终的考虑了城乡人口迁移和男女性别的分区域离散人口发展模型

$$\begin{cases} X_v^s(t+1) = M_v^s(t)X_v^s(t) + \eta_v^s(0A)Y_v^s(t) + (-W_v^s(t)X_v^s(t)), \\ X_c^s(t+1) = M_c^s(t)X_c^s(t) + \eta_c^s(0A)Y_c^s(t) + N_v^s(t)RC_a^s(t_0)W_v^s(t)X_v^s(t), \\ X_{ts}^s(t+1) = M_{ts}^s(t)X_{ts}^s(t) + \eta_{ts}^s(0A)Y_{ts}^s(t) + N_{ts}^s(t)[I - RC_c^s(t_0)]W_{ts}^s(t)X_{ts}^s(t). \end{cases} \tag{12}$$

2.3 人口模型指标体系

模型中的 $x_a^s(i,t)$ 表明了人口发展过程随时间的演化规律。为刻画人口发展的某些特点和人口统计之用，还要引进一些数字特征量，这些特征量和状态量 $x_a^s(i,t)$ 有着直接联系。它们从不同方面反映了人口发展的内在属性，通常称作人口指数。下面给出主要人口指数的定义及其计算公式，以建立模型完整的指标体系。

1) t 年代的人口总数

$$N(t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{a\in\{c,ts,v\}}\sum_{s\in\{m,f\}}x_a^s(i,t).$$

2) t 年代死亡人口总数

$$D(t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{a\in\{c,ts,v\}}\sum_{s\in\{m,f\}}\mu_a^s(i,t)x_a^s(i,t)+\sum_{a\in\{c,ts,v\}}\sum_{s\in\{m,f\}}\mu_a^s(00,t)\psi_a^s(t).$$

3) t 时刻总人口的平均年龄

$$A(t)=\frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{a\in\{c,ts,v\}}\sum_{s\in\{m,f\}}ix_a^s(i,t).$$

$A(t)$ 实质上是各个年龄构成的加权平均，它越小，说明年龄小的人口比重大，因而青年人相对的多，年龄构成轻。

4) t 时刻人口自然增长率 $G(t)=\frac{\psi(t)-D(t)}{N(t)}$。随基数 $N(t)$，$N(t-1)$，$\frac{1}{2}(N(t)+N(t-1))$ 的不同，有后向、前向、中向自然增长率的区分。

5) t 年代社会抚养指数 $\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)}$。其中，$L(t)$ 具有劳动能力的人口数量，男性具有劳动能力的年龄区间定义在 $[r_{l1},r_{l2}]$，女性为 $[r'_{l1},r'_{l2}]$。$\rho(t)$ 表示该年代每一个有劳动能力的人平均要抚养的没有劳动能力的人数，它越大社会的人口负担就越大。

6) t 年代老龄化指数 $\omega(t)=\frac{A(t)}{S(t)}$，其中 $A(t)$ 为人口平均年龄，$S(t)$ 为平均寿命。

7) t 年代 i 岁人口性别比 $\lambda(i)=100\frac{x_a^m(i,t)}{x_a^f(i,t)}$。

3 模型求解

人口发展过程的预测是根据初始状态，推算出未来人口发展状态，即人口数量、年龄分布和区域分布的变化规律。人口发展过程是一个对输入反应很慢的动态系统，这是它不同于一般动态系统的重要特点。人口发展过程的预测，实质上就是在给定初始边界和各种参数的条件下，求解方程(1)。解出 $x_a^s(i,t)$ 后，依上节各公式就可以计算出今后任何时刻的人口指数。这些指数是制定合理的人口政策的有力科学依据。

为了做人口发展过程的预测，需要给出方程的初始状态。对于该模型，即 $X_a^s(t_0)$，$M_a^s(t_0)$，$H_a(t)$，$S_a^s(t)$ 以及 $f_a^s(t)$。确定后，选择不同的控制参数 $\beta_a(t)$，便对应不同的人口发展过程。下面给出确定参数的方法。

3.1 迁移人口的估算

以往的人口预测，通常是对 $W_a^s(t)$ 给出一个简单假设，或固定为某一时期的值。然而，随着人口城镇化水平接近高峰，各年龄人口迁移率将随之降低；甚至当逆城镇化时，$W_a^s(t)$ 还会出现负值。仅假设 $W_a^s(t)$ 为一个常量是不符合人口城镇化发展规律的，不能准确反映人口城镇

化对总人口再生产的影响，无法对未来城乡人口年龄结构做出准确预测。因为，一是人口城镇化速度决定了乡-城镇人口年龄别迁移率的水平；二是城乡生育率水平的客观差异，使得乡-城迁移人口会影响总人口生育率；三是乡-城镇人口迁移将直接影响人口年龄结构。为准确刻画这三个方面的影响，在人口预测中必须依据城镇化进程对 $W_a^s(t)$ 进行估算。

首先，据统计数据估计得到乡-城镇迁移人口的年龄模式 $IR_a^s(i)$, $i=0,1,\cdots,m$；其次，设定乡-城镇迁移人口年龄模式的变化态势；然后，根据城镇化水平速度计算总和乡-城镇人口迁移率 TIR。

引入 a 区域 i 岁 s 性人口的迁移率

$$IR_a^s(i)=\frac{IR_a^s(i,t)}{\sum\limits_{i=0}^{m} IR_a^s(i,t)},$$

它是一个关于年龄的迁移率函数，与时间的依赖性较小，变化不显著[4]。基于简化计算的考虑，本文用统计数据来估算它。在计算过程中，它是一个相对固定的常数，即

$$IR_a^s(i)\approx\frac{IR_a^s(i,t_0)}{\sum\limits_{i=0}^{m} IR_a^s(i,t_0)}.$$

记 $TAR_a^s=\sum\limits_{i=0}^{m} IR_a^s(i,t)$，依据城镇化水平的预测值，则可推算出所需要的 $IR_a(i,t)$，而城镇化水平的预测值可由人口城镇化与社会经济发展水平之关系对未来进行预测[2]，记作 $U_v(t)$，即 $TAR=\varphi(U_v(t))$。

未来人口城镇化速度的确定是预测未来乡-城镇迁移人口的基础，根据国内外关于城镇化水平与经济发展水平关系的研究[3]，我国已进入城镇化快速发展阶段，其发展速度可容易确定。从而本文中的 $W_a^s(t)$ 会随社会经济的发展而不断变化，更具实际意义。至此，可得到迁移模式 $W_a^s(t)$ 的计算方法，即

$$W_a^s(t)=\mathrm{TAR}\begin{bmatrix} IR_a^g(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & IR_a^g(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & IR_a^g(0) \end{bmatrix}.$$

3.2 方程参数的拟合

下面给出生育模式、死亡率及初始条件三个重要参数的拟合方法。

3.2.1 生育模式的计算

首先确定生育模式 $h_a(i,t)$。$h_a(i,t)$, $i=r_1,(r_1+1),\cdots,r_2$ 是 a 区域年龄为 i 岁妇女可以生育的加权因子，满足归一化条件 $\sum\limits_{i=r_1}^{r_2} h_a(i,t)=1$。$h_a(i,t)$ 越大，说明 a 区域年龄为 i 岁妇女生育婴儿越多。在归一化条件下，按年龄分布适当调整 $h_a(i,t)$ 的大小，便可控制生育的早晚以及密疏；控制比生育率 $\beta_a(t)$ 的大小，又可控制生育的多少。因此，$h_a(i,t)$ 和 $\beta_a(t)$ 是人口政策的一种定量描述，比如我们一贯的乡村人口政策是“晚、少、稀”，“晚”和“稀”就可以通过生育模式 $h_v(i,t)$ 来调节，而“少”则通过 $\beta_v(t)$ 来加以控制。根据宋健等对统计数据的研究，生育模式函数可以相当准确的用统计学中的 χ^2 分布密度函数曲线来表达[4]，即

$$h_a(r)=\begin{cases} 0, & r<r_1, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}(r-r_1)^{(\frac{n}{2}-1)}e^{-\frac{r-r_1}{2}}, & r\geq r_1, \end{cases} \tag{13}$$

这个函数在 $r_0 = r_1 + n - 2$ 处达到极大值，r_0 成为峰值生育年龄，其中 r_1 是最低生育年龄。结合题给数据和相关文献定义[5]，我国现在平均水平可以取 $r_1 = 15$，而分别对城、镇、乡来说，这个值会略有不同，三者在数值上呈递减形式；$r_2 = 49$。将式(14)离散化，就得到离散生育模式 $h_a(i,t)$, $i = r_1, (r_1+1), \cdots, r_2$。

3.2.2 死亡率的计算

$\mu_a^s(i,t)$ 是对人口发展过程预测有较大影响的重要参数。统计数据表明，婴儿、1-2岁儿童以及老年人的死亡率较高，其他年龄死亡率较低，且相差不大。随着我国现代化建设的发展，人民生活及医疗卫生水平不断提高，尤其乡村更为明显，$\mu_a^s(i,t)$ 将随着 t 增大而减小。在预测人口发展时，可假定 $\mu_a^s(i,t)$ 在若干年内下降到某一最小值，即接近世界最小死亡率地域的现有死亡率值[4]。参照宋健人口模型，取

$$\mu_a^s(t) = \begin{cases} \mu_a^s(t_0), & 5 \le \mathrm{i} \le 50, \\ \mu_a^s(t_0)[1-\varepsilon(t-t_0)], & i < 5 \text{ or } i > 50. \end{cases}$$

可以看出，死亡率的统计数据在年份上越多，$\mu_a^s(i,t)$ 的逼近就越精确，整个预测值也越准确。本文进一步认为婴儿的前向死亡率 $\mu_a^s(00,t)$ 也服从上述规律，所以一致地沿用这个公式来计算 $\mu_a^s(00,t)$。

3.2.3 人口初值的选择

初始条件 $x_a^s(i,t)$，就是预测起始那一年的人口数据。根据题给数据，选定2000年的数据作为初始条件，这样既能充分利用题给数据信息，又能对本文所建模型做出检验预测，是一个不错的选择。

3.3 人口发展方程的解

据题给数据求解式(11)，得到关于中国人口的中短期预测和长期预测结果，结果见表1。

表1：中国人口中短期和长期预测结果汇总表(单位：万人)

年份	人口总数	市		镇		乡		迁移人口		老年人口
		男	女	男	女	男	女	男	女	
2005	13.0756	1.8149	1.8097	1.1271	1.1114	3.6664	3.5461	812	752	0.9695
2010	13.4702	2.1148	2.1067	1.8939	1.8831	2.7681	2.7035	815	779	1.0954
2015	13.8907	2.2920	2.2836	2.1197	2.1086	2.5712	2.5156	848	734	1.2851
2020	14.2913	2.4581	2.4495	2.3238	2.3123	2.4024	2.3452	832	761	1.6372
2025	14.7333	2.6225	2.6137	2.5282	2.5164	2.2557	2.1967	769	683	1.9530
2030	14.8256	2.6983	2.6894	2.6479	2.6360	2.1067	2.0474	725	679	2.3012
2035	14.6022	2.7014	2.6926	2.6810	2.6693	1.9582	1.8997	371	343	2.8963
2040	14.2047	2.6563	2.6478	2.6506	2.6392	1.8196	1.7912	218	176	3.1244
2045	14.1197	2.6545	2.6460	2.6489	2.6376	1.7805	1.7523	76	128	3.2078
2050	13.9158	2.6301	2.6217	2.6245	2.6134	1.7270	1.6991	33	52	3.2617

1) 全国总人口数

更加直观地，把预测值绘制如图1和2。可见我国人口在未来20年仍会持续增长，且增长率几乎呈线性。中短期预测一般受人口惯性的影响较大，有必要在此基础上做长期预测。人口总数在2030年左右迎来一个高峰后开始减少，2050年回落到当前水平，这说明了计划生育国

策的得力。总人口数先升后降主要是人口增长的惯性所致。目前我国的总和生育率已经低于生育更替水平，但人口仍会持续增长并在2030年左右达到峰值；2030年以后由于综合生育率低于生育更替水平，人口系统趋向于稳定。

2)　出生人口性别比

为进一步清晰对比，把各区域的出生性别比画成图3至5。可以看到各区域的出生性别比在短期内上升后最终在长线上出现了回落，这也是符合自然界发展规律的。

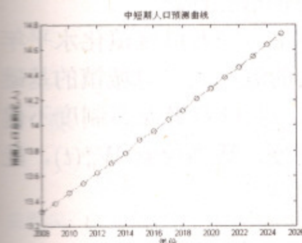


图 1: 中短期人口预测值曲线图

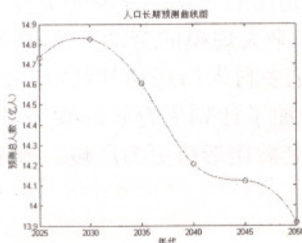


图 2: 长期人口预测值曲线图

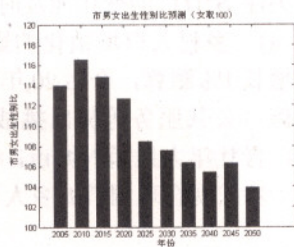


图 3: 城出生男女性别比预测图

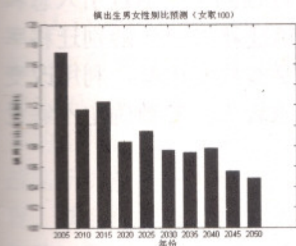


图 4: 镇出生男女性别比预测图

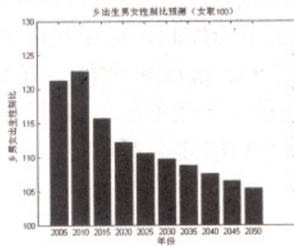


图 5: 乡出生男女性别比预测图

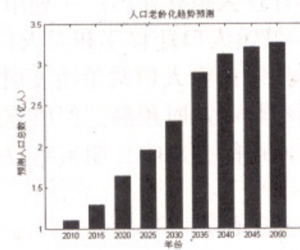


图 6: 老龄人口数预测图

3)　老龄化进程

直观起见，将老龄人口数的预测数据绘制成柱状图6。人口发展的巨大惯性使得人口高速繁殖的后果在若干年后才得以显现，并且未来增加的趋势呈递增走向。老龄化加重了社会负担，对可持续发展是一个严重的挑战。

4)　乡村人口城镇化

随着人口的流动，我国人口城镇化水平将逐年提高，并于2050年达到70%以上，人民生活条件和质量进一步提升，跻身中等发达国家行列。

4　结论

本模型对我国城、镇、乡人口的预测结果，呼应了《报告》中关于人口总数、性别比、城镇化水平及老龄化等关键因素的描述[1]。关注 $h_a(i,t)$、$\beta_a(t)$、$S_a^s(t)$、$W_v^s(t)$ 等敏感参数，能够帮助决策者及时发现问题，制定科学合理的政策。

1)　人口发展与社会经济的发展：2020年我国人口预计将增至13.29亿，2030年迎来峰值14.83亿，2050年落至13.91亿。人口的适度发展，能极大促进经济发展；反之，则会起极大的阻碍作用。决策者应关注 $h_a(i,t)$ 和 $\beta_a(t)$ 的变化，通过政策导向和宣传教育，使中国进入“人口低速发展，经济快速增长”的理想状态。

2) 老龄化进程加速的影响：老年人口数量多、老龄化速度快、高龄化趋势将是未来我国人口的显著特点。2020年，65岁以上老年人口比重预计将增至11.2%；40年后形成老龄人口高峰，占总人口比重达22%。老龄化加速使“人口红利期”很快消失，养老问题进一步突显，提高出生率、健全社保是解决问题的关键。

3) 高男女出生性别比的影响：到2020年，20-45岁男性将比女性多3000万人左右。出生性别比失衡不仅使人才培养面临结构性难题，更给人口和社会的可持续发展带来严峻挑战，适当关注 $S_a^s(t)$ 的变化能及时提示性别比的变化，发现处于各个环节中的潜在问题。

4) 乡村人口城镇化的影响：未来大规模的劳动力流动将持续存在，按人口城镇化水平年均增长1%测算，今后20年将有3亿乡村人口迁移到城镇。日益庞大的流入人口对城镇的基础设施、公共服务等提出挑战，也增加了计划生育管理和服务的难度。乡村养老保障制度不健全，青壮年大量涌入城市，使乡村老龄化形势更为严峻。改革户籍制度，适当控制 $W_v^s(t)$，能进一步宏观合理调节城乡人口结构。

5 模型的优缺点分析

上述模型的优点主要体现在：建模过程中关注动态细节，把握人口发展的关键因数，对实际有较大指导作用；在利用分区域分性别带迁移项的人口发展方程进行预测中，通过引入总和乡-城镇人口迁移率和对人口城镇化水平的控制，可便利解决对乡-城镇迁移人口年龄别迁移率的控制；当人口政策改变时，即 $h_a(i,t)$、$\beta_a(t)$、$S_a^s(t)$、$W_v^s(t)$ 等主要参数变化时，利用改变的参数可及时预测。但所建模型也还存在一些不足，如对历史数据需求较大；参数确定不够灵活，可能会影响长期预测效果，需在今后继续深入研究。

参考文献：

[1] 国家人口发展战略研究课题组. 国家人口发展战略研究报告[Z]，2007

[2] 王金营，原新. 分城乡人口预测中乡-城人口迁移技术处理及人口迁移预测[J]. 河北大学学报，2007, 32(135)

[3] 霍利斯，钱那里等. 发展的型式[M]. 经济科学出版社，1975

[4] 宋健，于景元，李广元. 人口发展过程的预测[J]. 中国科学，1980, (9)

[5] 李永胜. 人口预测中的模型选择与参数认定[J]. 财经科学，2004, 2(203)

Forecast Model of China’s Population Growth

YANG Hai-bin, ZHAO Xiang, HUANG Kui-hua

Advisor: Instructor Group

(National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract: By integrating with cybernetic technology, principle and method of the system engineering, this paper addresses the complicated social phenomenon of China’s population growth quantitatively. With the considering of new features of China’s population, including the acceleration of aging and urbanization, the increase of sex ratio on birth, the growth of the population is divided into age, birth and migration process by using state space analysis. Also regionalized and sexualized discrete equations of population growth with migration item and its index system are established afterwards. The computation of the parameters is discussed in order to solve the equations. Conclusion and evaluation of the model are presented at last.

Keywords: population forecast; improved population growth equation; state-space analysis; migration pattern

文章编号:1005-3085(2007)08-0071-08

中国人口增长的常微分方程模型

任 可, 唐 云
(清华大学数学科学系, 北京 100084)

摘 要: 本文利用已有的数据资料，从中国人口增长的特点出发，将城镇与农村中不同性别的人口按不同的年龄段分别处理，并引进农村人口向城镇迁移的因素，建立起一个关于中国人口增长的常微分方程组初值问题的数学模型。还利用该模型对中国未来人口的增长变化进行了预测。

关键词: 出生率; 死亡率; 城镇化

分类号: AMS(2000) 91D20 **中图分类号:** O29 **文献标识码:** A

1 前言

人口问题的研究一直是人们所关注的一个课题。关于人口增长问题已经有多方面的研究，如马尔萨斯指数增长模型、logistic 人口阻滞增长模型、偏微分方程模型和 Leslie 模型[1]，以及 Lotka 积分模型[2]等。我国是一个人口大国，在中国的人口增长的数学模型研究方面也有颇多的工作，如宋键和于景元[3]、王彦[4]和霍江明[5]等。特别在2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》[6]报告，对于中国人口的发展现状、未来人口增长的预测、人口素质、人口教育、就业问题以及中国人口现阶段增长等特点进行了总结。本文基于该文章及《中国人口统计年鉴》[7]等资料所提供的数据信息建立起一个具有中国人口增长特点的常微分方程初值问题的数学模型，并利用该模型对中国未来人口的增长变化进行预测。

2 基本假设

人口模型的建立必须基于现有人口的增长特点(即人口情况的基本假设)。据《国家人口发展战略研究报告》等资料的分析，当前中国人口的增长有着如下特点：

1) 中国正在进入老龄化社会，老年人的比重在不断加大；

2) 农村与城镇育龄妇女的生育率及出生人口性别比有着较大差异；

3) 农村人口不断城镇化(《国家人口发展战略研究报告》估计转化率为百分之一)。

我们知道，人口的增长率取决于出生率、死亡率和不同人群之间的迁移率。而出生率又取决于育龄妇女的生育率及育龄妇女在总人口中所占的比例。因此我们需要首先对这些相关数据进行分析。

1) 育龄妇女的生育率：图1是1994—2005年十年间城镇育龄妇女的生育率，从中可看出虽然成下降趋势，但是下降已趋于缓和。农村育龄妇女的生育率亦有类似情形，但总体数据偏高。因此我们有必要将城镇人口和农村人口分离开来讨论。

2) 出生人口性别比：图2为城镇和农村在1994-2005年期间的出生人口男女性别比例(以每100个女性有多少男性来记录的)。通常的比例应当是105 : 100左右，而该图的数据远超过了这个比例。这将导致未来育龄妇女在总人口中的比例减少，从而造成总出生率下降。因此我们有必要将出生人口的男女性别比因素考虑进去。

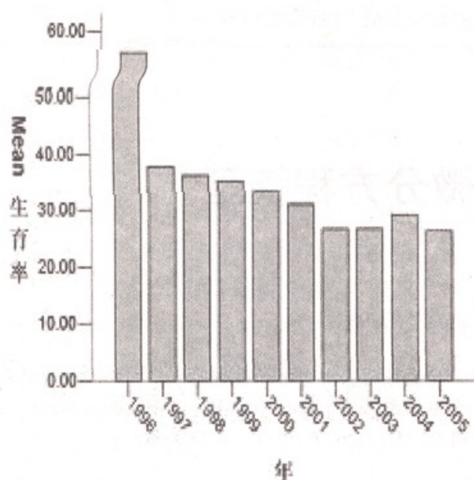


图1: 1994-2005年育龄妇女生育率(千分比)

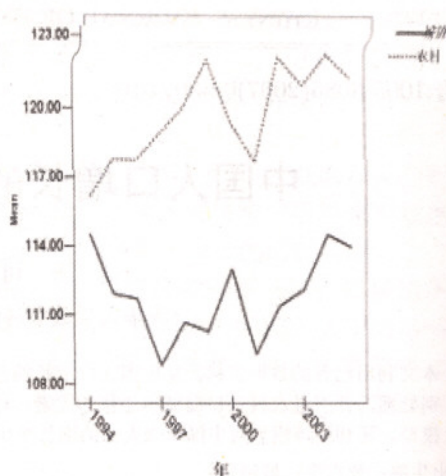


图2: 1994-2005年男女出生比例(以女性为100记)

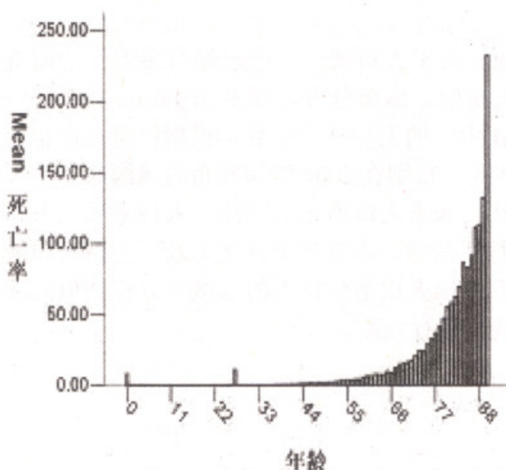


图3: 城镇女性2005年死亡率(千分比)

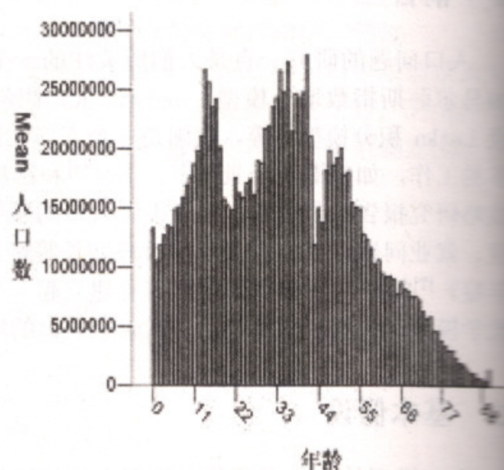


图4: 2005年分年龄段人口数量

3) 死亡率：以城市妇女2005年各年龄段的死亡率(千分比)为例(城市男及农村男女也类似)。从图3中我们可以清楚地看到不同年龄段的死亡率是不同的：0–3岁孩子死亡率较高，3–50岁死亡率较低，50岁以上人口的死亡率不断提高。这说明有必要将死亡率分年龄段考虑在模型中。

4) 人口的年龄分布：图4是2005年分年龄段的人口数量(其他年有类似情形)，从中我们可以看出在过去50年的人口出生的变化情况。比如说，20岁的人口与20年前(即1985年)出生的人口很接近。特别可以看出在15年前(即1990年)的前后和35年前(即1970年)的前后均出现过人口生育高峰。进一步的数据分析表明，这两次生育高峰主要都出现在农村。也看得出最近15年来人口出生的下降趋势。而50岁以下的人口由于死亡率很低，这些人成批进入老年阶段将使得老龄人口的比重不断加大。

5) 农村人口城镇化：由于农村和城镇人口出生率的较大差异，大量的农村人口转化为城镇人口对中国人口的增长将造成很大影响，因此必须把这个因素考虑进去。《国家人口发展战

略研究报告》预测农村人口的城镇化水平是年增长1%。但考虑到在城镇中女性在服务业和婚姻方面较男性的优势，我们假设农村男性以0.9%的比率转化，而女性以1.1%转化。

据此，我们可以把中国人口分成城镇男、城镇女、农村男和农村女四类分别处理，并引进农村人口向城镇迁移的因素。

3 模型的建立

3.1 人口分年龄段比例的未来走向

由于在讨论到出生率和死亡率时都涉及到不同年龄段的问题，所以需要对上述每一类人口在各年龄段所占的比例分别做出估计。为方便起见，我们对每一类人口都按其是否参与生育分为：幼年(0–14岁)、青壮年(15–49岁)和老年(50岁及以上)三个年龄段人口的比例来处理。当然，这些量并不是互相独立的，比如，城市男性人口应等于城市男的幼、青壮和老年三类人口总和，余类推。通过对上述数据的分析及相关资料(如《世纪之交的中国人口》[8])中的一些讨论，可以看出，老龄化的结果造成老年人口增加，而幼年和青壮年的人口在总人口中所占的比例则逐步减少。数据分析还表明，育龄妇女的生育年龄主要集中在20至35岁，且其生育率趋于常数。

以城镇女性人口为例，我们将城镇女性人口按年龄分作81维向量，按已知各年龄的人口比例、死亡率和育龄妇女的生育率，利用 Leslie 矩阵[4]的方法进行迭代。与通常 Leslie 矩阵方法不同的是，在迭代过程中我们所取的是人口比例而非人口数量。这就可以得到未来60年的人口年龄比例曲线。具体步骤如下：

设向量 $A(n)=[a_0(n),a_1(n),\cdots,a_{80}(n)]^T$ 各分量以次为第 n 年的城镇0至80岁女性人口的比例，并设

$$B(n)=\begin{bmatrix} b_0(n)\\ b_1(n)\\ \vdots\\ b_{80}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b & \cdots & b & 0 & \cdots & 0\\ 1-c_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & 1-c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1-c_{79} & 1-c_{80}\end{bmatrix}A(n-1),$$

其中矩阵第一行从第16列到50列为常数 b (城镇育龄妇女的女婴生育率)，而 c_i 为 i 岁城镇女性人口的死亡率，

$$A(n)=B(n)/\Sigma_{i=0}^{80}b_i(n).$$

取2005年的百分之一人口抽样调查数据为初值，通过 Excel 进行迭代，并按上述幼年、青壮年和老年三个年龄段人口的比例来表示，得到图5。

从图5中我们可以看出，就城镇妇女的幼年阶段与作为青壮年的育龄阶段所占的比例而言，其变化均呈指数下降趋势。实际上由于这两个年龄段人口的总体死亡率都很小，其每次迭代相当于乘以一个小于1的“常数”。

而这一点我们也可以粗略地证明一下：把人口分成幼年 x_1、青壮年 x_2 和老年 x_3 三部分，得到的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ 满足

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}_n=\begin{bmatrix} 1-\alpha & b & 0\\ \alpha & 1-\beta & 0\\ 0 & \beta & 1-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}_{n-1},$$

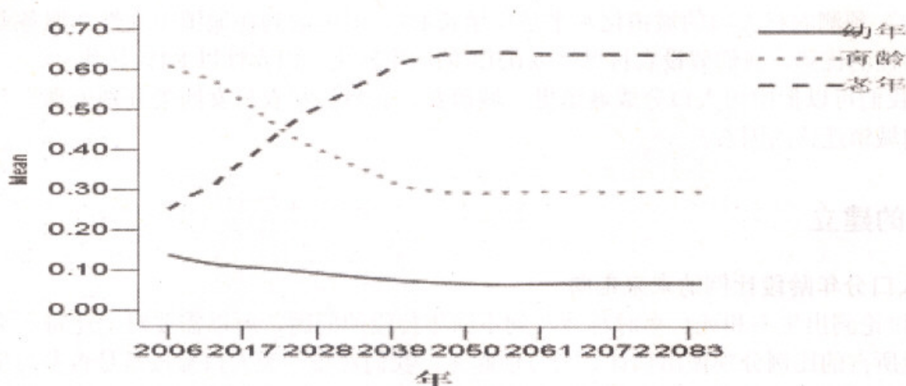


图5: 未来城镇妇女分年龄段走势

其中 α 为每年幼年向青壮年的转化率，β 是青壮年向老年转化率，b 是育龄妇女的女婴生育率，c 是老年的死亡率(幼年和青壮年的死亡率由于很低就忽略不计了)。

通有地说，上述矩阵是可以对角化的，即存在可逆矩阵 P，使得

$$A=\begin{bmatrix}1-\alpha & b & 0\\ \alpha & 1-\beta & 0\\ 0 & \beta & 1-c\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}u & 0 & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & 0 & 1-c\end{bmatrix}P=P^{-1}BP.$$

这样，我们就得到

$$(x_1,x_2,x_3)_n^T=(P^{-1}B^nP)(x_1,x_2,x_3)_0^T.$$

然后再对 $\mathbf{x}_n$ 进行归一化处理，即命

$$\mathbf{y}_n=(y_{1n},y_{2n},y_{3n})^T=\mathbf{x}_n/\Sigma_{i=1}^3x_{in},$$

得到

$$y_{in}=l_i+(1-m_i(u/v)^n)k_i,\quad i=1,2;\qquad y_{3n}=1-y_{1n}-y_{2n},$$

其中 l_i, m_i, $k_i\in\mathbf{R}$ 由 $\mathbf{x}_n=(x_{1n},x_{2n},x_{3n})^T$ 确定。

由于只考虑短期 ($n<60$)，为方便起见，我们可用以常数 e 为底的指数函数进行拟合。这就得到下面的微分方程组

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1(t)/\mathrm{d}t=-a_1(\omega_1(t)-b_1),\\ \mathrm{d}\omega_2(t)/\mathrm{d}t=-c_1(\omega_2(t)-d_1),\\ \omega_3(t)=1-\omega_1(t)-\omega_2(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ 和 $\omega_3(t)$ 分别为幼年、育龄和老年城镇女性人口比例函数，a_1, b_1, c_1, d_1 为非负参数，满足 $b_1+d_1<1$。

对于该方程我们可以直接写出解 (r, s 为初值)

$$\begin{cases}\omega_1(t)=(r-b_1)\mathrm{e}^{-a_1t}+b_1,\\ \omega_2(t)=(s-d_1)\mathrm{e}^{-c_1t}+d_1,\\ \omega_3(t)=1-\omega_1(t)-\omega_2(t).\end{cases}\tag{2}$$

由于农村男女与城镇男有类似的结果(即其0–14岁和15–49岁两个年龄段的趋势函数都呈指数性下降)，在此不再赘述。所不同的是，如前面假设中所指出的，农村分别在1970年和1990年前后经历了两次生育高峰，而指数拟合只能体现出未来分年龄段走势的主趋势。为了能更好地拟合未来农村人口分年龄段比例的走势，还应当在指数拟合基础上添加一个不断减弱的周期性震荡。这是因为，在出现某次生育高峰后还会周期性地出现新的生育高峰，而文化素养的提高和晚婚晚育的政策会减削弱这种峰值效应。为简便起见，我们添加一个不断减弱的正弦函数来描述这种周期性的变化。

对于其他三类人口的分年龄段的人口比例变化趋势的讨论类似，我们只给出结果：

设 $\xi_1(t)$ 为幼年城镇男性比例函数，$\xi_2(t)$ 为壮年城镇男性比例函数，$\xi_3(t)$ 为老年城镇男性比例函数，则有

$$\begin{cases} \xi_1(t) = (r-b_2)\mathrm{e}^{-a_2 t} + b_2, \\ \xi_2(t) = (s-d_2)\mathrm{e}^{-c_2 t} + d_2, \\ \xi_3(t) = 1 - \xi_1(t) - \xi_2(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中 a_2，b_2，c_2，d_2 为非负参数，而且满足 $b_2 + d_2 < 1$。

设 $\psi_1(t)$ 为幼年农村女性比例函数，$\psi_2(t)$ 为育龄农村女性比例函数，$\psi_3(t)$ 为老年农村女性比例函数，则有

$$\begin{cases} \psi_1(t) = (r-b_3)\mathrm{e}^{-a_3 t} + b_3 + g_1\mathrm{e}^{f_1 t}\sin\pi(t-\delta)/k_1, \\ \psi_2(t) = (s-d_3)\mathrm{e}^{-c_3 t} + d_3 + g_2\mathrm{e}^{f_2 t}\sin\pi(t-\delta)/k_2, \\ \psi_3(t) = 1 - \psi_1(t) - \psi_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

其中 f_1，f_2，g_1，g_2，k_1，k_3，δ 为普通参数，a_3，b_3，c_3，d_3 为非负参数，而且满足 $b_3 + d_3 < 1$，

设 $\zeta_1(t)$ 为幼年农村男性比例函数，$\zeta_2(t)$ 为壮年农村男性比例函数，$\zeta_3(t)$ 为老年农村男性比例函数，则有

$$\begin{cases} \zeta_1(t) = (r-b_4)\mathrm{e}^{-a_4 t} + b_4 + g_3\mathrm{e}^{f_3 t}\sin\pi(t-\delta)/k_3, \\ \zeta_2(t) = (s-d_4)\mathrm{e}^{-c_4 t} + d_4 + g_4\mathrm{e}^{f_4 t}\sin\pi(t-\delta)/k_4, \\ \zeta_3(t) = 1 - \zeta_1(t) - \zeta_2(t), \end{cases} \tag{5}$$

其中 f_3，f_4，g_3，g_4，k_3，k_4，δ 为普通参数，a_4，b_4，c_4，d_4 为非负参数，而且满足 $b_4 + d_4 < 1$.

3.2 模型的最终确立

由于上面已确定了城镇和农村的男女各年龄段的比例函数，现在我们就可以按前面所作的基本假设，即生育率是由育龄妇女的数量决定的、农村和城镇育龄妇女的生育率均不变、出生人口性别比均不变、各年龄段的人口的死亡也均不变，以及农村人口按照一定的常数比例向城镇迁移这几个要点，按照各类人口的出生率、死亡率和迁移率这三个方面来建立下面的常微分方程模型(6)：设

λ_1–城镇育龄女性生育率，α_1–城镇男性出生比例，χ_1–农村男转化率；

λ_2–农村育龄女性生育率，α_2–农村男性出生比例，χ_1–农村女转化率；

ε_1，ε_2，ε_3–城镇幼年、育龄、老年女性的死亡率；

ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3–城镇幼年、壮年、老年男性的死亡率；

φ_1，φ_2，φ_3–农村幼年、育龄、老年女性的死亡率；

γ_1，γ_2，γ_3–农村幼年、壮年、老年男性的死亡率。

x–城镇男人口，y–城镇女人口，u–农村男人口，v–农村女人口

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \alpha_1\lambda_1\omega_2(t)y - (\phi_1\xi_1(t) + \phi_2\xi_2(t) + \phi_3\xi_3(t))x + \chi_1 u, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (1-\alpha_1)\lambda_1\omega_2(t)y - (\varepsilon_1\omega_1(t) + \varepsilon_2\omega_2(t) + \varepsilon_3\omega_3(t))y + \chi_2 v, \\ \mathrm{d}u/\mathrm{d}t = \alpha_2\lambda_2\psi_2(t)v - (\gamma_1\zeta_1(t) + \gamma_2\zeta_2(t) + \gamma_3\zeta_3(t))u - \chi_1 u, \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (1-\alpha_2)\lambda_2\psi_2(t)v - (\lambda_1\psi_1(t) + \lambda_2\psi_2(t) + \lambda_3\psi_3(t))u - \chi_2 v. \end{cases} \tag{6}$$

该模型表明，各类人口的出生率取决于相应育龄妇女的数量；而死亡率的改变是因为中国进入老龄化；农村与城镇的男女出生性别比还在着较大的差别；农村人口的城镇化正在稳步向前。这均反映出中国人口增长的各个特点。

4 未来人口预测

4.1 参数确定

我们可以确定上述参数，这些参数据主要是根据《中国人口统计年鉴》2001-2005年卷中数据整合得到的：

生育率：$\lambda_1 = 0.03026$，$\lambda_2 = 0.04356$，

男性出生比例：$\alpha_1 = 0.535$，$\alpha_2 = 0.547$，

转化率：$\chi_1 = 0.009$，$\chi_2 = 0.011$，

城镇女性死亡率：$\varepsilon_1 = 0.00073$，$\varepsilon_2 = 0.00068$，$\varepsilon_3 = 0.01045$，

城镇男性死亡率：$\phi_1 = 0.00075$，$\phi_2 = 0.00131$，$\phi_3 = 0.01187$，

农村女性死亡率：$\varphi_1 = 0.00217$，$\varphi_2 = 0.00146$，$\varphi_3 = 0.01367$，

农村男性死亡率：$\gamma_1 = 0.00207$，$\gamma_2 = 0.00246$，$\gamma_3 = 0.01542$，

城镇女性走势相关：$a_1 = 0.05$，$b_1 = 0.067099$，$c_1 = 0.05$，$d_1 = 0.294517$，

城镇男性走势相关：$a_2 = 0.05$，$b_2 = 0.073994$，$c_2 = 0.045$，$d_2 = 0.321786$.

农村女性走势相关：$a_3 = 0.065$，$b_3 = 0.11221$，$c_3 = 0.045$，$d_3 = 0.380758$，$g_1 = 0.06$，$g_2 = -0.02$，$f_1 = -0.03$，$f_2 = -0.045$，$k_1 = 14$，$k_2 = 14$，$\delta = 4$.

农村男性走势相关：$a_4 = 0.065$，$b_4 = 0.13192$，$c_4 = 0.045$，$d_4 = 0.432448$，$g_3 = -0.0076$，$g_4 = 0.05$，$f_3 = -0.01$，$f_4 = -0.035$，$k_3 = 13$，$k_4 = 13$，$\delta = 4$.

4.2 方程离散化求解

现在我们利用得到的人口模型来对人口的增长进行预测。首先是确定初值。对于《中国人口统计年鉴》2005年版中所提供的城镇与农村的抽样调查数据进行改良，我们可以得到初值

$$x(0) = 287740000, \quad y(0) = 288259000, \quad u(0) = 399428000, \quad v(0) = 357638000.$$

方程(6)是一个非自治的耦合的常微分方程组，可以用数值方法求得其初值问题的解。我们取一年作为步长，采用简单的 Euler 法，因为人口数量的第 n 年增长可以由第 $n-1$ 年的数据经过迭代得到。利用上述初值，通过 Euler 法，我们可以得到下面的算图。

图6是从2005年开始，未来60年的人口走势预测，其中以“…”表示农村男性人口，以“–·”表示农村女性人口，以“–”表示城镇男性人口，而以“––”表示城镇女性人口。

从图6我们不难看出，在未来的60年内(在现有人口政策和经济发展均不变的情况下)城镇人口会进一步增长，农村人口会出现下降，而且农村人口的男女比例会进一步加大。

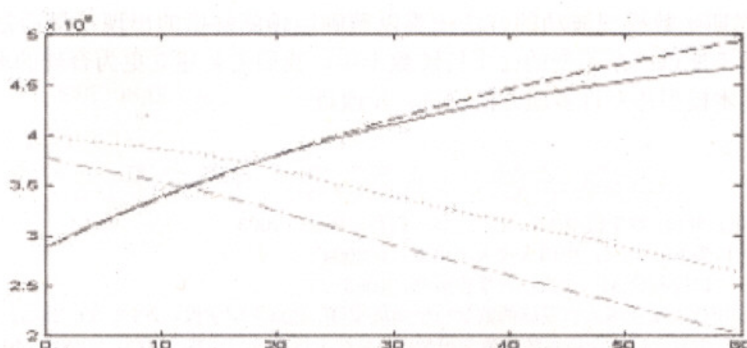


图6:　未来60年人口走势预测

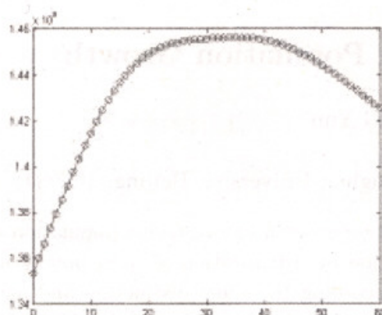


图7:　未来60年人口总量预测

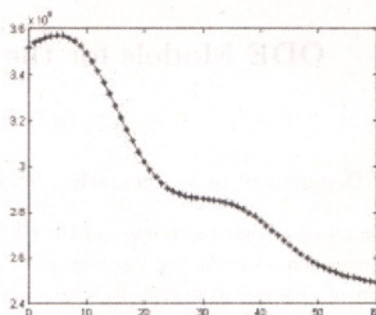


图8:　未来60年育龄妇女总量预测

图7的结果显示，约30年以后中国人口的总数会达到顶峰，总人口数接近15亿。而这与《国家人口发展战略研究报告》中的结论有些出入，但是曲线的走势和该报告中所提供的结果还是比较相近的。

图8为对未来60年育龄妇女人口数的预测。特别从前40年的预测结果可见：育龄妇女会从2005年的接近3.8亿人减少为约2.7亿人，其间会出现两个峰值，间隔约为30年。这个结果与《国家人口发展战略研究报告》的对未来40年育龄妇女的预测结果基本相同。

5　总结

本文在对中国人口增长的特性进行分析的基础上，利用多维方法解决中国人口增长的城乡差异和男女差异问题；利用育龄妇女比例的走势解决人口出生率的变化问题；又利用将人口按年龄段分类的方法解决人口总死亡率的变化问题；最后利用农村人口城镇化来代替人口的迁移，从而得到了最终的常微初值问题数学模型。模型在内容上包含了中国人口增长的各个特点，预测结果与《国家人口发展战略研究报告》中的比较一致。但是不足之处依然存在：首先，本文中的模型在处理生育率和死亡率的变化时，由于使用的是年龄段的平均数值，仍不能很好地模拟这两方面的实际变化；其次，在处理未来人口分年龄段比例走势时主要采用指数函数拟合，尽管在处理农村人口变化时又辅以周期函数，但由于人口增长的惯性十分复杂，仅使

第24卷 增刊2　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0079-04

关于中国人口预测的数学模型

唐　云

(清华大学数学科学系，北京 100084)

摘　要: 本文对于2007年全国大学生数学建模竞赛A题介绍了命题的背景和解答要点，对同学的解答中一些优点和问题进行评述。最后还展望进一步研究的前景。

关键词: 数学模型；中国人口；预测

分类号: AMS(2000) 91D20　　**中图分类号:** O29　　**文献标识码:** A

1　问题背景

人口问题是一个永恒的话题。从马尔萨斯的《人口原理》起，人们对于人口规律的研究已有二百多年的历史。关于人口问题的一般数学模型也已写进一些教材中，如姜启源等人编写的《数学模型》[1]中就介绍了人口增长的指数增长模型、阻滞增长模型、偏微分方程模型和 Leslie 迭代矩阵模型。中国是个人口大国，几十年来，专家们对中国人口发展和预测的数学模型研究积累了丰富的成果，还研制出一些专用于人口预测的软件。

人口问题是复杂的，涉及到社会的方方面面。目前，对近期的预测已可达到相当的精度，但对人口发展做出较确切的中长期预测还是难以实现的。这些都为人口问题的数学模型研究创造了条件，也为人口发展的中长期预测留下了研究的空间。

2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》[2]指出，“人口众多始终是我国考虑一切问题的出发点和落脚点”。该报告分析了当前中国人口增长的特点，对今后几十年中国人口的发展进行了预测，并提出了人口总量控制的战略目标。但该报告没有公布数学模型。这样，如何通过数学建模的方法对中国人口做出中长期的预测，便成了我们感兴趣的一个课题。除了一般的规律外，中国人口的增长还有着自身的特点和发展趋势，这正是我们建立中国人口预测模型的出发点。在本赛题中也提到“老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长”。在已有模型研究成果的基础上进一步发展，建立一个符合中国人口增长特点的数学模型，使得我们能通过数学的方法来对中国人口的发展趋势做出较长期的预测，并加强我们的国情意识，这就是本命题的初衷。

2　解答要点

2.1　模型类型

首先要考虑的是建立什么类型的数学模型，是确定性还是随机性？由于人口增长的机理还是比较清楚的，而且本题要求做出较长期的预测，因此可以选择确定性系统的数学模型，建立一个描述随时间演化过程的微分方程或差分方程。上述一般性的人口模型，从指数增长模型到 Leslie 迭代矩阵，也都属于这种类型。

建立微分或差分方程模型的关键在于如何确定可能起着重要作用的状态变量和参数，并弄清它们之间的关系。这就需要对相关的数据进行深入分析。只有基于对实际数据的分析，才可

能提出合理的假设、从而建立起反映各状态变量之间关系的模型；也只有在对实际数据分析的基础上，才能确定模型中的各项参数，并对所解出的结果进行检验，最后做出预测。

2.2 数据分析

应抓住人口增长中能反映规律性的数据进行分析。我们知道，对于一个地区或一类人群而言，人口的自然增长率=出生率−死亡率+迁移率，这里的迁移率符号当迁入时为正，迁出时负。而：

$$\text{出生率} = \text{育龄妇女的生育率} \times \text{育龄妇女在总人口中所占的比例}。$$

因此，必须对上述相关数据进行分析。

通过从《年鉴》[3]摘录的“附录2”中的数据进行分析表明：

1) 生育率及出生人口的男女性别比在农村和城镇有着较大差别，农村育龄妇女的生育率及初生儿性别比明显高于城镇。而女孩偏少又将进一步影响出生率。因此有必要将出生率和男女性别比在农村与城镇人口中分别处理；

2) 大量农村人口持续不断转化为城镇人口对于中国人口的增长将造成很大影响，因此必须把城镇化作为农村人口向城镇迁移的主要因素考虑在模型中去；

3) 从中国人口年龄分布的数据分析中可以看出，近年来人口出生呈下降趋势。而死亡率的数据分析则告诉我们，从50岁起，人口的死亡率才逐步上升，在这之前一直是比较低的。这表明在相当一个时期人口进入老龄化的“速率”将高于出生率，致使老龄人口的比重不断加大。另一方面，老龄化进程的加速反过来又对人口的总体出生率和死亡率造成影响，所以必须把老龄化这个年龄的因素考虑进去。

2.3 模型的建立

由于所考虑的人口模型是一个动态的确定性模型，在建模时就应当首先考虑到如何设置状态变量。据上分析，应当把城镇人口与农村人口，及男女性别区分开来；另一方面，注意到育龄妇女的生育率是决定人口增长的主要因素，以及老龄化在人口死亡率中所起的主要作用，所以还应当把人口的年龄分布考虑在模型中。

较多的同学用到了 Leslie 人口迭代矩阵的思想，其特点是引进了年龄结构。这是合适的。但是 Leslie 矩阵原来的模型[1]比较粗糙，比如，在讨论到人口的出生率时没有将育龄妇女的生育率及出生人口的性别比按(城镇与农村)不同区域分离开来，当然也没有这些区域之间的迁移过程，因此，在用该模型思想时必须把这些因素考虑进去。这样便可以建立起一个差分方程组初值问题的模型。

还有不少同学用到偏微分方程模型[1]，这是在宋键等[4]的人口模型中采用过的。该模型含有年龄结构，所以也是合适的。当然也需要将人口的出生率及性别比分城镇和农村两个“区域”讨论，并引进“区域”之间的迁移过程。所得到的偏微分方程的初边值问题有一般的数值解法。许多学生取一年作为步长对该类方程离散化，其过程与上述矩阵迭代方法基本一致。

不管用什么方法，这次发表的优秀论文均考虑到中国人口在城镇和乡村不同区域的差异和迁移过程，这都是成功的。

本期有一篇《中国人口增长的常微分方程模型》，是我学生本科毕业期间做的。虽不很令人满意，考虑到还没有见到同类模型，发表出来供参考。

2.4 确定参数

本赛题的另一个重点是对参数的估计。模型中可能出现的参数(包括初值条件)很多，如人口密度、出生率、(总和)生育率、生育模式、性别比、死亡率、存活率、迁移率、城镇化率、平均年龄、平均寿命及老龄化指数等。这些参数都要求根据《年鉴》[3]或别的文献中的实际数据进行分析来确定。

从实际数据出发，基于一定的机理，便可以通过一定的拟合方式来确定这类参数。所采用的方法很多，如通常的曲线拟合法、最小二乘法、回归分析法、BP 神经网络算法、灰色系统 GM(1,1) 算法和支持向量机 (SVM) 等方法。一些重要参数的拟合函数还可以在文献中查到，如与生育率相关的正态分布和 Γ 分布。这些方法散见于同学们的论文中，在此次发表的优秀论文中也有提及，限于篇幅，本文就不一一介绍了。

这里说一下关于城镇化参数的估计。在“报告”[2]中估计今后20年内人口城镇化水平是年均增长1%。这里把市和镇放在一起，称为“城镇”，而乡单列，称为“乡村”或“农村”。但《年鉴》[3]中的人口数据都是按市、镇和乡(或县)分别给出的，每年数据不一样。本题的“城镇化”也可以这样理解。这就需要对“市”和“镇”的每个要用到数据进行加工，即按“附录2”最右边给出的每年人口的抽样调查数据进行加权换算。有许多同学没有这样做。当然，一些同学把城、镇、乡分成三个不同区域来讨论它们之间的迁移关系，这也是可以的。

此外，在本题的数据说明中曾指出“个别数据有异常，原文如此，可酌情处理”。实际上，“附录2”中关于2003年育龄妇女的生育率数据应该是百分比，但按《年鉴》[3]原是以千分比计，与实际相差10倍。许多同学注意到这一点，把它们作为异常数据剔除，这是合适的。

2.5 模型的求解和预测

用适当的数值方法进行迭代，即可求得数学模型的解，从而得到今后几十年的预测结果。许多同学都能够根据自己建立的数学模型计算出预测结果，绘出图像。

模型的预测分为中短期预测和长期预测，而“中短期”和“长期”的概念与区分是要同学们自己定的。一般把中短期定为少则5年，多则一、二十年，而长期至多是到五、六十年，这都是合适的。在《报告》[2]中预测到2050年。可以把自己的结果与《报告》等文献中的相应结果进行对照分析。如出现较大差异，则应找出原因，予以改进，或提出自己的看法。

有些同学在完成所要求的中短期及长期预测的同时，还就不同的控制措施(生育政策)对未来人口发展的影响做了模拟和分析；还有些同学对老年化或性别比的变化进行预测，这些做法都是值得肯定的。

3 问题与展望

3.1 发现的问题

从阅卷中发现在同学论文中有下面一些问题：

1) 关于模型的选择：前面说过，本模型宜考虑用具有确定性的微分或差分方程。有的同学采用灰色系统模型，或一些统计模型，这些对于确定参数及人口的近期预测是比较有效的，但难以对人口中长期的变化做出预测。

2) 有许多同学没有考虑到农村人口城镇化。事实上，城镇化是本题模型与一般人口模型的一个重要区别。因为育龄妇女生育率及出生人口性别比在城镇与乡村的差异导致人口发展的不均衡，而持续的城镇化将对中国人口的变化产生重要影响，在预测模型中是不可缺少的。

3) 年龄结构：特别是对于中国人口增长问题，诸如生育率(包括晚婚晚育)、老龄化及死亡率之类的问题都与年龄结构密切相关。有些同学这方面注意不够。

4) 学风问题：预测的结果本应是根据自己模型计算出来的，但发现有些同学的模型与所得的数值结果明显不一致。有的对所得结果优缺点的评价也不够实事求是。最后应列出自己参考过文献，包括论文、著作和数据，都要注明出处，如果是网上的，则应列出网址，但发现仍有些同学没有这样做。这些都是学风问题，应引起注意。

3.2 展望

关于人口增长的数学建模问题可以从深度和广度两个方面做进一步的研究。深度是指模型本身的数学与数值方面；广度则是指与该模型之外相关领域的联系。

我们看到，人口增长有迟滞效应。在《报告》[2]中提到“由于20世纪80年代至90年代第三次出生人口高峰的影响”，导致在2005-2020年出生人口数量会“出现一个小高峰”，这就是迟滞效应。如果在模型中适当引进迟滞项，就可预测到这种“小高峰”现象。由此可以建立起一个关于人口增长的迟滞微分方程模型，当然，此时的初值应当是一个近几十年来人口的变化函数。此外，人口在发展过程中还会受到各种随机因素的干扰，由此可以考虑建立一个关于人口变化的随机微分方程模型。这些都涉及到更多的数学知识。而以人口增长预测为动因，还可以发展出更加有效的计算技术、方法和工具。

另一方面，人口发展是个社会问题。《报告》[2]就是把它作为当代中国社会发展整体中的一个部分来研究的。从人口的发展与其他领域的关系，比如从人口与经济、人口与资源环境、人口与文化教育等不同方面的研究中，都可以引申出很多很有意义的数学建模课题。

参考文献：

[1] 姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2003

[2] 国家人口发展战略研究课题组. 国家人口发展战略研究报告[J]. 人口研究，2007, 31(1): 1-10

[3] 国家统计局人口统计就业司. 中国人口统计年鉴[M]. 北京：中国统计出版社，1995-2006

[4] 宋健，于景元. 人口控制论[M]. 北京：科学出版社，1985

On Mathematical Models for Prediction of China Population

TANG Yun

(Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: In this article the background and solving idea for the contest problem A of CUMCM-2007 are introduced, and comments on solution papers of the participants are proposed. Finally, prospects for the further investigation are shown.

Keywords: mathematical modeling; China population; prediction

第24卷 增刊2　　　　工　程　数　学　学　报　　　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0083-12

公共交通系统最佳路径模型与算法

汤志高， 王继利， 曹莹瑛

指导教师： 曹华林

(海军航空工程学院(青岛)，青岛 266041)

编者按: 这是一篇从各方面看都很不错的论文。用乘客出行时常考虑的四个指标，分别构成字典序来选择出行路线，所建立的两个模型、相应的算法及数据结构都比较恰当。六个实例的计算准确无误，第三问建立的规划模型和算法基本可行，但将一个地铁站周围可以换乘的几个公汽站视为一点的做法欠妥。

摘　要: 本文将题中的直行、环行线路信息分别抽象，以 MATLAB 软件中元胞数组为载体储存直达数据库 Q，针对用户不同需求(换乘次数、总耗时、总费用、转站车辆是否始发)构成不同非负有向赋权图和相应的权矩阵，建立多目标线性规划模型求解。为使算法的空间、时间复杂度相对平衡，在求解换乘次数小于等于2次的时候采用线路相交算法来计算可行方案，换乘次数大于2次时采用邻接算法或线性规划法求解。最后把各目标下求得的出行路线方案集以字典序方式输出至用户终端。

关键词: 非负有向赋权图；邻接算法；字典序

分类号: AMS(2000) 90C11　　**中图分类号:** O221　　**文献标识码:** A

1　问题重述（略）

2　模型假设

1) 不存在重名站点，且只有同名站点允许换乘(利用地铁站除外)；
2) 各路径发车频度相同，并且不考虑交班时段；
3) 环行线路双向行驶，在车过终点后不另行收费；
4) 始发站、终点站出入地铁站需要步行4分钟；
5) 地铁站周围任意公汽站点间步行耗时2分钟；
6) 用户对步行时间与乘车时间等同看待。

3　问题分析

3.1　不同公汽线路抽象

根据题中原始数据信息，将线路分三类(上下行经过站点相同、环行线、上下行经过站点不同)，下面对这三种线路进行数据处理：

1) 上下行经过站点相同

这种线路虽然上下行经过站点相同，但线路的方向不同，下行线和上行线需要抽象为两条有向线路如图1所示：

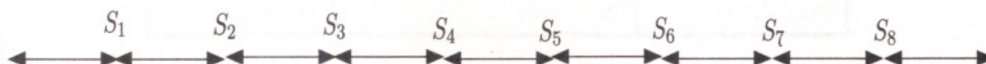


图1:　下行经过站点相同抽象示意图

2) 环行线

本文假设环形路线为双环(双向行驶)，所以在对这两条线路进行抽象时，为保证任意两站点距离最近，需把每条线路抽象为4条有向线路：$\overrightarrow{ABCD}$、$\overrightarrow{ADCB}$、$\overrightarrow{CDAB}$、$\overrightarrow{CBAD}$ 如图2所示。

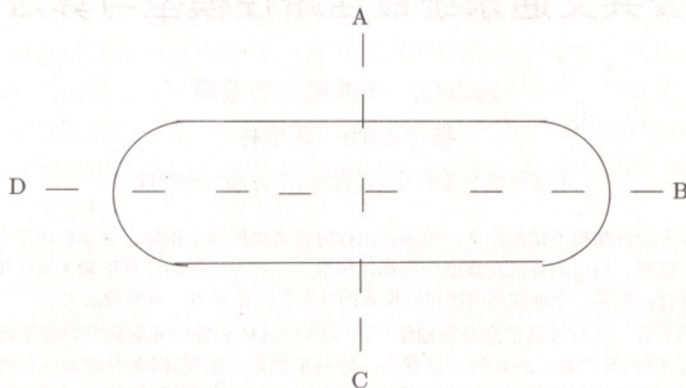


图2: 环行线抽象示意图

3) 上下行线经过站点不同

由于下行线与上行线经过站点不同，该种线路显然需要抽象成两条有向线路处理如图3所示

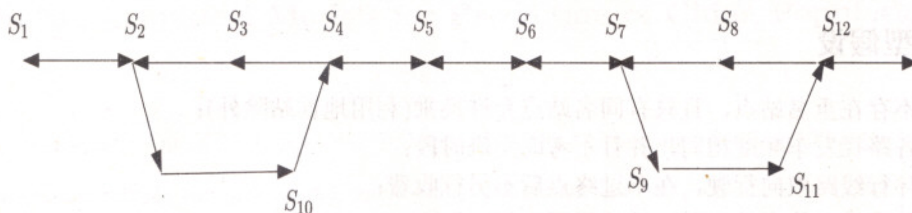


图3: 不同过站上下行路线抽象示意图

3.2 “直达数据库 Q”的建立

Cell{1,1}	Cell{1,2}	Cell{1,3}
Cell{2,1}	Cell{2,2}	Cell{2,3}

Cell{1,2}:

车号	费用	耗时
L001	2	27
L076	3	18

图4: 元胞结构示意图

图4中 Cell{1,2} 代表 Q 中第1行第2个元胞(即从站点 S0001 到站点 S0002 的直达公交线路信息)，元胞中队列的每一行代表一辆直达车信息。

3.3 最少换乘次数的确定

1) 直达线路数矩阵

统计 Q 中各站点间直达线路数可以建立 $A=(a_{ij})_{N\times N}$，N 表示站点数目，矩阵元素 a_{ij} 表示第 i 个站点到第 j 个站点直达线路数 n，其中当 $i=j$ 时为无效路径，设定值为0，即

$$a_{ij}=\begin{cases} n, & i\neq j,\\ 0, & i=j. \end{cases}$$

2) 换乘线路数矩阵

直达矩阵 $\mathbf{A}$ 为 $N\times N$ 阶方阵，矩阵的2次幂中元素表示任两站点间通过1次转乘的路线数 $A^2=A\cdot A$；以 A^n 表示方阵 $\mathbf{A}$ 的 n 次幂，A_{kj} 为站点 $k\to j$ 的直达线路数，则

$$A_{ij}^{n}=\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^{n-1}\cdot A_{kj}\quad i,j=1\cdots N,\ n>1.$$

3) 最少换乘次数矩阵

矩阵 $B=(b_{ij})_{N\times N}$ 表示从站点 $i\to j$ 必要的最少换乘次数

$$b_{ij}=\begin{cases} \min\{n|A_{ij}^{n}\neq 0,n\in N^{*}\}-1, & i\neq j,\\ 0, & i=j. \end{cases}$$

基于最少换乘次数矩阵 B，可确定题中给出的6条实例线路最少换乘次数分别为1、2、1、1、2、1次，若同时考虑公汽与地铁第六线改变为0次。

4 模型 I 的分析与建立

4.1 权矩阵定义

引用图论相关知识，将题中所提供的公汽网络抽象成一个非负有向赋权图 $\overrightarrow{G}=(V,E,W)$，$\overrightarrow{G}$ 中的每个顶点为不同的站点，如果从 $\overrightarrow{G}$ 中的顶点 v_i 到 v_j 有直达路线，那么这两点之间存在有向边，记做 $(i,j)\in E$，方向为从 i 指向 j，相应的有 $w(v_i,v_j)$ 称为该有向边的权，这样公汽网络就抽象为一个有向赋权图。赋权图中的权可根据不同的目标进行定义，分别定义为：

时间：$W^t=(t_{ij})_{n\times n}$，其分量

$$t_{ij}=\begin{cases} t_{(v_i,v_j)}, & \text{站点 } v_i \text{ 至站点 } v_j \text{ 的直达时间},\\ +\infty, & \text{无直达线路}. \end{cases}$$

费用：$W^p=(p_{ij})_{n\times n}$，其分量

$$p_{ij}=\begin{cases} p_{(v_i,v_j)}, & \text{站点 } v_i \text{ 至站点 } v_j \text{ 的直达费用},\\ +\infty, & \text{无直达线路}. \end{cases}$$

始发：$W^f=(f_{ij})_{n\times n}$，其分量

$$f_{ij}=\begin{cases} f_{(v_i,v_j)}, & \text{站点 } v_i \text{ 至站点 } v_j \text{ 的直达线路是否在 } v_i \text{ 始发},\\ +\infty, & \text{无直达线路}. \end{cases}$$

4.2 目标分析

目标一：换乘次数最少

基于4.1节有向赋权图，引入0-1决策变量 x_{ij} 表示弧 (i,j) 是否在起点 s 与终点 e 的路上，则

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{弧 } (i,j) \text{ 位于 } v_s\to v_e \text{ 的路上},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

换乘次数最小可表示为

$$\mathrm{Min}\sum_{(i,j)\in E}x_{ij}-1. \tag{1}$$

目标二：行程总时间最短

行程总时间 = 始发等待时间 + 乘车总时间 + 公汽换乘时间：

$$\mathrm{Min}\Big(3+\sum_{(i,j)\in E}t_{ij}x_{ij}+5\Big(\sum_{(i,j)\in E}x_{ij}-1\Big)\Big). \tag{2}$$

目标三：行程总费用最少

统计 Q，建立 q_{ij} 表示 $i\to j$ 车辆属性，$q_{ij}=\begin{cases}1, & \text{表示单一票制1元},\\ 2, & \text{分段计价}.\end{cases}$

统计 Q，建立 s_{ij} 表示 $i\to j$ 过站数目，那么 $i\to j$ 直达费用表示为

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & q_{ij}=1,\\ 1, & q_{ij}=2,\quad s_{ij}\in[1,20],\\ 2, & q_{ij}=2,\quad s_{ij}\in[21,40],\\ 3, & q_{ij}=2,\quad s_{ij}\in[41,+\infty].\end{cases}$$

行程总费用最少

$$\mathrm{Min}\sum_{(i,j)\in E}p_{ij}x_{ij}. \tag{3}$$

目标四：转乘车辆始发最多

$$\mathrm{Max}\sum_{(i,j)\in E}f_{ij}x_{ij}. \tag{4}$$

4.3 约束分析

约束一：换乘次数约束

基于对目标一的分析，可得在有向赋权图中换乘次数表达式，以 c 表示乘客所能接受的最大换乘次数，换乘次数约束可表示为

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E\\(c\in N^*)}}x_{ij}-1\le c, \tag{5}$$

约束二：最短路起讫点约束

在图 $\overrightarrow{G}$ 中路过点分为“起点”、“中间点”、“终点”三类，起点只有出边而无入边，中间点既有入也有出边，终点只有入边。

$$\sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ij}{}^{n}x_{ij} - \sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ij}{}^{n}x_{ji} = \begin{cases} 1, & i=s,\\ -1, & i=e,\\ 0, & i\neq s,e, \end{cases} \tag{6}$$

4.4 模型 I 的建立

基于本节 4.1~4.3 分析，以式(1)~(4)为目标，式(5)、(6)为约束，建立线性规划如下

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - 1$$

$$\text{Min}\Big(3 + \sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij} + 5\Big(\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - 1\Big)\Big)$$

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in E} p_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Max} \sum_{(i,j)\in E} f_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in E} x_{ij} - 1 \leq c \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ij} - \sum\limits_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i=s,\\ -1, & i=e,\\ 0, & i\neq s,e, \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0, \quad (i,j)\in E. \end{cases}$$

5 模型 II 的分析与建立

5.1 公汽、地铁网简化

根据题意，地铁站周围存在多个相邻公汽站点，但并未给出具体位置情况，站点间步行时间难以确定，为使问题得到简化，本文将这些可互换的紧邻站点抽象为一个站点，如图 5 所示

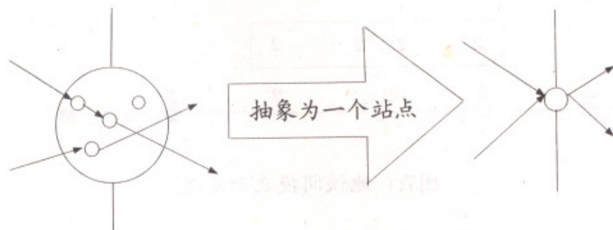


图5: 紧邻站点抽象示意图

在以上假设条件下视地铁同公汽，可以建立公汽、地铁直达数据库 Q^D。

5.2 部分目标分析

行程总时间最短:

1) 乘车时间

$$\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij}.$$

2) 设 $Zij=3$ 表示 $i\to j$ 最短直达为公汽(也表示始发乘坐公汽等待3分钟)，$Zij=2$ 为地铁(也表示始发乘坐地铁等待2分钟)，总等待时间

$$T1=\sum_{(i,j)\in E} Z_{ij}x_{ij}.$$

3) 步行时间

首先，将相同车型换乘、不同车型换乘的步行时间，一同视为2分钟

$$T_a=2\Big(\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}-1\Big),$$

出现不同车型换乘，步行时间增加4分钟(图6中虚线表示地铁，空心圆表示地铁站)

$$T_b=4\sum_{\substack{Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij}.$$

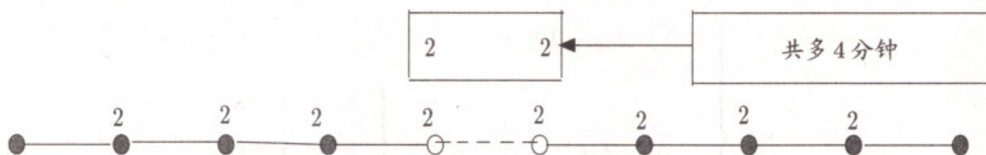


图6: 不同车型换乘示意图

地铁换乘地铁是不同车型换乘的特例，且只可能在 D12 与 D18 换乘，如图7所示。出现这种情况在基础上减少步行时间4分钟

$$T_c=4(Y^{D12}+Y^{D18}).$$

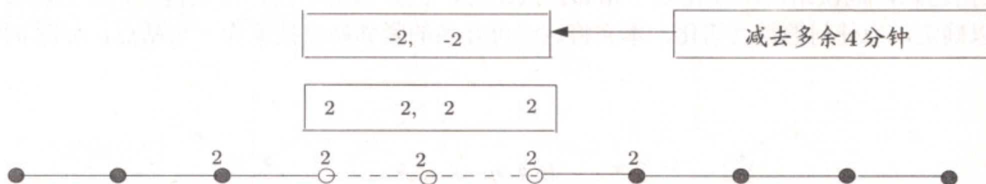


图7: 地铁间换乘示意图

若始发乘坐地铁转公交到达终点，需要增加时间2分钟

$$T_d=2\sum_{\substack{i=s,j\neq e\\Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij}.$$

若始发乘坐公交转地铁到达终点，也需要增加时间2分钟

$$T_e = 2 \sum_{\substack{i \neq s, j=e \\ Z_{ij}=2 \\ (i,j) \in E}} x_{ij}.$$

总步行时间 $T2 = T_a + T_b - T_c + T_d + T_e$.

综上，行程总时间(总等待时间+总步行时间+乘车时间)最短表示为

$$\text{Min}\Big(T1 + T2 + \sum_{(i,j) \in E} t_{ij} x_{ij}\Big). \tag{7}$$

行程总费用最少：

统计 Q^D，建立 q_{ij} 表示 $i \to j$ 车辆属性：

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{表示单一票制 1 元}, \\ 2, & \text{表示分段计价}, \\ 3, & \text{地铁线路}. \end{cases}$$

统计 Q^D，建立 s_{ij} 表示 $i \to j$ 过站数目，那么 $i \to j$ 直达费用表示为

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & q_{ij} = 1, \\ 1, & q_{ij} = 2, \quad s_{ij} \in [1, 20], \\ 2, & q_{ij} = 2, \quad s_{ij} \in [21, 40], \\ 3, & q_{ij} = 2, \quad s_{ij} \in [41, +\infty], \\ 3, & q_{ij} = 3. \end{cases}$$

行程总费用=正常票价和−地铁间换乘减少的费用。

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in E} p_{ij} x_{ij} - 3(Y^{D12} + Y^{D18}). \tag{8}$$

5.3 地铁间换乘约束

地铁间换乘只可能出现在站点 D12、D18，设变量 Y^{D12}、Y^{D18} 表示是否地铁间换乘，考虑到模型规模非常大，可构建如下线性约束关联主变量 x_{ij}

$$\sum_{\substack{j=M \\ Z_{ij}=2 \\ (i,j) \in E}} x_{ij} \geq Y^M, \quad \sum_{\substack{i=M \\ Z_{ij}=2 \\ (i,j) \in E}} x_{ij} \geq Y^M, \tag{9}$$

$$Y^M \geq 0, \qquad M = D12, D18.$$

考虑到不可能二次换乘地铁，建立如下约束

$$Y^{D12} + Y^{D18} \leq 1. \tag{10}$$

5.4 模型 II 的建立

基于前文分析，以式(1)、(7)、(8)、(4)为目标，式(5)、(6)、(9)、(10)为约束，建立线性规划模型如下

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - 1$$

$$\text{Min}\Big(T1 + T2 + \sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij}\Big)$$

$$\text{Min}\Big(\sum_{(i,j)\in E} p_{ij}x_{ij} - 3(Y^{D12} + Y^{D18})\Big)$$

$$\text{Max} \sum_{(i,j)\in E} f_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in E} x_{ij} - 1 \le c, \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ij} - \sum\limits_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = s, \\ -1, & i = e, \\ 0, & i \ne s, e, \end{cases} \\ x_{ij} \ge 0, \qquad (i,j) \in E, \\ \sum\limits_{\substack{j=M\\Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij} \ge Y^M, \\ \sum\limits_{\substack{i=M\\Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij} \ge Y^M, \\ Y^{D12} + Y^{D18} \le 1, \\ Y^M \ge 0, \qquad M = D12, D18. \end{cases}$$

6　模型求解

6.1　邻接算法

邻接算法是标准 Dijkstra 算法的一种扩展，主要是在换乘时需要计算不同的换乘时间与费用；算法中的距离*根据不同目标，表达式略有不同。

步骤1:　载入对应权矩阵，输入起、终点 s、e；

步骤2:　若最少换乘矩阵 $B_{(se)} = 0$，输出直达线路方案并结束程序；

步骤3:　若 $B_{(se)} = 1$，采用线路相交法[5]计算一次换乘方案记录为 P；

步骤4:　初始化 $V = \{s\}$，有序链表 $U = \{u_1 \cdots u_n\}$ 中包含除 s 外的所有其他顶点，U 中顶点按边的权大小升序排列；

步骤5:　从 U 中选取第一个顶点 k (顶点 s 到 k 的边权最小)，把 k 加入 V 中；

步骤6:　以 k 为新考虑的中间点，修改顶点 s 到 U 中各顶点的距离*：若从 s 到 $u(u \in U)$ 的距离*比原来小，则修改到达 u 的距离*，添加 k 至路径内；

步骤7:　出现2次以上转乘方案从 s 到达 e 时：与对应 P 比较，若1次换乘距离*最短则结束程序，输出 P；否则，重复(5)和(6)直到 V 包含所有顶点。

6.2 线性规划法

文中(4.4)、(5.4)节建立了线性规划模型 I、II，本文在 Lingo 软件环境下求解，得到了各目标的全局最优解见(6.4)。

6.3 模型 I 求解结果见表 1 所示

表1: 模型 I 乘车方案表(总耗时包括始发等待时间3分钟)

线路	换乘次数	总耗时（分钟）	转乘站点	乘坐车辆	转乘始发	费用（元）
S3359	1*	104	S1784	L436→L167	0	3*
↓	1	140	S2364	L469→L217	1*	3
S1828	2	67*	S3697→S1784	L484→L485→L167	0	3
S1557	2*	109	S1919→S3186	L084→L189→L460	0	3*
↓	2	130	S1919→S0417	L084→L497→L460	1*	4
S0481	3	102*	S1919→S3186→S903	L084→L189→L091→L239	-	4
S0971	1*	131	S2184	L013→L417	0	3*
↓	2	106*	S2517→S2159	L013→L290→L469	0	3
S0485	2	124	S2324→S2482	L013→L132→L417	1*	4
	1*	86	S2263	L355→L345	0	2*
S0008	1	131	S3915	L463→L118	1*	2
↓	2	70	S1691→S2184	L198→L290→L345	0	3
S0073	4	62*	S3766,S2085,S483,S525	L198,L476,L17,L328,L103	-	5
S0148	2*	109	S0036→S2210	L308→L156→L417	1*	3
↓						
S0485	3	105*	S3604→S2361→S2210	L308→L81→L156→L417	-	4
S0087	1*	68	S3496	L454→L209	0	2*
↓	2	49*	S0088→S0427	L021→L231→L097	0	3
S3676	2	61	S3874→S0280	L021→L068→L462	1*	3

6.4 模型 II 求解结果

通过邻接算法与规划算法均可求出各目标全局最优解；表 2 与表 3 中按字典序分别给出六个实例同时考虑公汽、地铁的乘车方案；其中加 * 号项表示该项指标最优。

表2: 模型 II 乘车方案表(总耗时包括始发等待时间)

线路	换乘次数	总耗时（分钟）	转乘站点	乘坐车辆	转乘始发	费用（元）
	1*	104	S1784	L436→L167	0	3*
S3359	1	140	S2364	L469→L217	1*	3
↓	2	67	S3697→S1784	L484→L485→L167	0	3
S1828	2	79	S1842→S1671	L123→L475→L041	1	3
	4	65*	S2903,D12,D37,S1671	L15,L201,T02,L428,L41	-	7

表3: 模型 II 乘车方案表(总耗时包括始发等待时间)

线路	换乘次数	总耗时（分钟）	转乘站点	乘坐车辆	转乘始发	费用（元）
	2*	109	D20→S3186	L084→L189→L460	0	3*
S1557	2	121	D20→S1402	L084→L030→L460	1	3
↓	2	121	D20→S1402	L363→L030→L460	1	3
S0481	3	102*	S1919→S3186→S903	L84→L189→L91→L239	-	4
	1*	131	S2184	L013→L417	0	3*
S0971	2	99	D01→D21	L094→T001→L051	0	5
↓	2	124	S2324→S2482	L013→L132→L417	1*	4
S0485	3	98*	D01→D15→3351	L094→T01→L156→L417	-	6
	1*	83	D13	L159→L474	0	2*
S0008	2	58	D30→D25	L150→T002→L103	0	5
↓	2	63.5	D30→D24	L150→T002→L103	1*	5
S0073	3	56.5*	D15→D12→D25	L200→T01→T02→L103	-	5
S0148	2*	90.5	D02→D21	L024→T001→L051	0	5
↓	2	109	S0036→S2210	L308→L156→L417	1*	3*
S0485	3	89.5*	D02→D15→S3351	L024→T001→L156→L417	-	6
S0087	0*	30*	-	T002	-	3
↓	0	33	-	L231	-	1*
S3676	0	42	-	L381	-	1

7 模型 III 的分析与建立

本模型主要以出行总时间最省为主要目标，同时考虑转乘次数尽量少，行程费用最少，转乘点始发站最多。有向赋权图中任意两点之间的时间权值有乘车时间 t_{ij}^1 和步行时间 t_{ij}^2，此时对应乘车决策变量为 x_{ij} (0-1 变量)，步行决策变量为 y_{ij} (0-1 变量)。

7.1 目标分析

综合考虑步行因素，只改变出行总耗时(总等待时间+换乘步行时间+乘车时间+步行时间)

$$\mathrm{Min}\Big(T1+T2+\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}^1 x_{ij}+\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}^2 y_{ij}\Big). \tag{11}$$

7.2 约束分析

同一线路段只能够在步行与乘车之间选其一，约束表达为

$$\sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n}(x_{ij}+y_{ij})-\sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n}(x_{ji}+y_{ji})=\begin{cases}1, & i=s,\\ -1, & i=e,\\ 0, & i\neq s,e,\end{cases} \tag{12}$$

$$x_{ij}+y_{ij}\leq 1,\quad (i,j)\in E. \tag{13}$$

7.3 模型 III 的建立

基于前文分析，以式(11)、(8)、(4)为目标，式(5)、(12)、(13)、(9)、(10)为约束，建立 0-1 整数规划模型如下

$$\mathrm{Min}\Big(T1+T2+\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}^{1}x_{ij}+\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}^{2}y_{ij}\Big)$$

$$\mathrm{Min}\Big(\sum_{(i,j)\in E} p_{ij}x_{ij}-3(Y^{D12}+Y^{D18})\Big)$$

$$\mathrm{Max}\sum_{(i,j)\in E} f_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}-1\le c,\\ \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n}(x_{ij}+y_{ij})-\sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in E}}^{n}(x_{ji}+y_{ji})=\begin{cases}1, & i=s,\\ -1, & i=e,\\ 0, & i\ne s,e,\end{cases}\\ x_{ij},y_{ij}\in\{0,1\},\qquad (i,j)\in E,\\ x_{ij}+y_{ij}\le 1,\qquad (i,j)\in E,\\ \left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{j=M\\Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij}\ge Y^{M}\\ \displaystyle\sum_{\substack{i=M\\Z_{ij}=2\\(i,j)\in E}} x_{ij}\ge Y^{M}\end{array}\right\} M=D12,D18,\\ 0\le Y^{D12}+Y^{D18}\le 1.\end{cases}$$

7.4 模型 III 算法（略）

8 结果分析、模型的评价与推广（略）

参考文献：

[1] 谢金星，薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005-7，第一版
[2] Duane Hanselman, Bruce Littlefield. Matlab 7[M]. 清华大学出版社，2006-5，第一版
[3] 王莉，李文权. 公共交通系统最佳路径算法[J]. 东南大学学报，2004, 34(3)
[4] Richard Johnsonbaugh, Marcus Schaefer. Algorithms[J]. 2007年6月
[5] 陈燕枫，蔡秀云，唐德强. 最短路径算法分析及其在公交查询的应用[J]. 工程图学学报，2001年，第3期
[6] 闫小勇，牛学勤. 公交网络多路径选择启发式算法研究[J]. 城市交通，2005, 3(3)
[7] 赵巧霞，马志强，张发. 以最小换乘次数和站数为目标的公交出行算法[J]. 计算机应用，2004, 24(12)
[8] 徐多勇，李志蜀，梅林. 基于GSM短信息的公交查询系统的最优化转乘方案研究与设计[J]. 计算机应用. 2007年6月，第27卷

第24卷 增刊2　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0095-08

最佳公交路线选择模型

周金健，阎 栋，唐 瑞
指导教师：数模组
(武汉大学，武汉 430072)

编者按：该论文针对乘客的不同需求，分别建立了不同优先次序的多目标优化模型，说明了不同模型适用的人群。论文给出了这些优化模型的计算方法，得到了较好的结果。论文还分析了算法的复杂性，考虑较为完整。此外，论文对第三问的处理是有价值的。

摘 要：本文在北京奥运会的背景下讨论了最佳公交路线选择问题。首先利用分层次多目标规划方法，按照出行者的不同类型分别建立了以换乘次数，时间，费用为第一目标的三种路线选择模型。再根据模型的特点设计出相应的求解算法：使用 BFS 算法求解路线选择模型一；Dijkstra 算法分别求出模型二，模型三。在 Dijkstra 算法中，采用了堆的结构把线性数据组织为树形数据，使算法时间复杂度从 $O(n^2)$ 降至 $O(n*\log n)$。最后将所建立的模型与算法分别应用于三个问题的具体求解。

关键词：分层多目标规划；公交路线选择；BFS 算法；Dijkstra 算法

分类号：AMS(2000) 90C08　　**中图分类号**：O221　　**文献标识码**：A

1 问题重述（略）

2 问题分析

为了方便模型建立和算法设计，首先应从实际交通网络中抽象出一个标准形式的交通网络图，然后基于此图建立最佳路线选择模型。鉴于出行者在选择路线时，所考虑的因素是多方面的，且其考虑因素的优先层次也会因人而异，故应分别进行讨论：对于大部分人而言，由于在奥运会期间，人口剧增，交通也会更加拥挤，因此他们会优先选择最方便的出行路线，即换乘次数最少的路线；对于赶时间的乘客，会偏重于时间花费少的路线；对于长期重复相同路线的乘客，则会优先考虑费用问题。由于公交查询系统应满足用户的各种不同需求，因此可根据出行者的不同类型分别建立以换乘次数，总耗时，费用作为第一目标的分层次多目标规划下的路线选择模型。再根据相应的模型的特点设计出求解算法，最后将上述两个一般模型与算法分别应用于问题一，问题二，问题三的具体求解。

3 模型假设

1) 除具有上下行不同路线的公交外，其他公交均为对开制；
2) 坐环行线经过终点站后要重新收费；
3) 同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘且无需支付地铁费；
4) 两个地铁站间不通过公汽站换乘；
5) 公交系统畅通无阻，不考虑中途发生故障堵车等情况。

4　符号说明

v_i：站点编号　N_i：路径换乘次数　C_i：总费用为 C_i
T_i：总耗时为 T_i　l_{ij}：第 i 类交通工具的第 j 条行驶线路

5　模型建立

5.1　标准形式的交通网络图

在一个交通网络中，主要由站点，线路，交通工具三要素组成。考虑到交通工具都是在特定的线路上运行的，故可把交通工具与线路归并成一个因素。而各类站点之间又是通过途经站点的交通工具来加以区别的，除此之外，它们之间是等价的。在站点转车的时候，会有转车时间，这个转车时间由两个交通工具的类型来决定，即站点具有变化的权值。同时线路也有权值，如线路上的行驶时间，收费等等。由此可得标准形式的交通网络图为

$$G=\{V,L,\omega(V),\psi(L)\},$$

其中

$$V=\{v_i\mid i=1,2,3,\cdots,n\}$$

为站点集合。

$$L=\{l_{ij}\mid i=1,2,3\cdots k,\ j=1,2,3\cdots n\}$$

为交通线路集合，l_{ij} 表示第 i 类交通工具的第 j 条行驶线路；$\omega(V)$ 表示站点权值集合，$\forall\, v_i\in V$ 存在三个权值，换乘权值 v_{ni} 耗费时间权值 v_{ti}，费用权值 v_{ci}；$\psi(L)$ 为线路权值集合。$\forall\, l_{ij}\in L$ 存在三个权值，换乘权值 l_{nij}，耗费时间权值 l_{tij}，费用权值 l_{cij}。

5.2　路线选择模型

出行者在选择交通路线时，面临的可行路线一般有多个，因此查询系统应根据用户的不同需求从中做出选择。鉴于用户在选择路线时，会综合考虑诸多因素，主要因素有换乘次数，总耗时，出行费用，为此建立多目标规划模型。

设给定起点 v_s 和讫点 v_e，可行的乘车路线集合为

$$A=\left\{A_i\mid A_i=v_s,l^{(i)}_{j_1k_1},v^{(i)}_{m_1},l^{(i)}_{j_2k_2},v^{(i)}_{m_2},\cdots,v_e\right\},$$

A_i 表示在起点 v_s 选择线路 $l^{(i)}_{j_1k_1}$ 到达 $v^{(i)}_{m_1}$，换乘 $l^{(i)}_{j_2k_2}$ 到达 $v^{(i)}_{m_2},\cdots$，最终到达 v_e 的乘车路线。记该路径换乘次数为 N_i，总耗时为 T_i，总费用为 C_i (N_i,T_i,C_i 可由 A_i 上站点，线路的相应权值之和得到)。则一般的多目标规划模型为

$$\min f(N_i,T_i,C_i) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &N_i\ge 0,\\ &T_i\ge 0,\qquad i=1,2,3,\cdots,n.\\ &C_i\ge 0,\end{aligned}$$

考虑到用户在权衡这些因素时，优先层次会不一样，故本文根据不同出行者分别建立分层多目标规划模型[1]，

1）模型一

研究表明公交网络的设计以减少平均换乘次数为重要原则[2]，且一般出行者也以换乘次数为优先考虑目标[3]，此外考虑到奥运会期间会有大量的外来人口来到北京看奥运，他们对于北京路线不熟悉，因而通常会更加偏重于选择最简便的路线，即换乘次数最少的路线。

综上可认为对主体人群而言，在满足换乘次数最少的前提下，总耗时与费用综合最少的路线为最佳路线。从而我们将换乘次数作为第一优先目标，时间与费用为第二优先目标建立分层多目标规划模型。

为了对时间与费用综合进行考虑，先对时间与费用作标准化处理，然后利用线性加权和法得到综合评价函数 $f(T_i,C_i)$ 如下

$$f(T_i,C_i)=\alpha\frac{T_i}{T_{\min}}+\beta\frac{C_i}{C_{\min}}, \tag{2}$$

其中 $\alpha+\beta=1$，且 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$；$T_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中总耗时的最小值；$C_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中所花费用的最小值；α, β 为权值系数，分别表示主体人群对总耗时与费用的重视程度。为了更客观科学地反映实际情况，其大小可通过对公众的问卷调查经统计方式进行确定。

综上分层多目标规划模型为

$$\min(P_{11}[N_i],P_{12}[f(T_i,C_i)]) \tag{3}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} N_i\geq 0,\\ T_i\geq 0,\\ C_i\geq 0,\end{array}\quad i=1,2,3,\cdots,n,$$

其中 P_{11}，P_{12} 为优先因子且 $P_{11}\gg P_{12}$，表示换乘次数 N_i，时间费用函数 $f(T_i,C_i)$ 分别属于第一，第二优先目标，且换乘次数对时间费用具有绝对优先权。

2) 模型二

对于赶时间的乘客，时间是他们最先考虑的因素，其次考虑换乘次数，最后考虑费用。鉴于此种情况下时间与换乘次数为主要决定因素，故可以忽略费用的影响，将三目标模型简化为以时间作为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层规划模型

$$\min(P_{21}[T_i],P_{22}[N_i]) \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} T_I\geq 0,\\ N_i\geq 0,\end{array}\quad i=1,2,3,\cdots,n,$$

其中 P_{21}，P_{22} 为优先因子，且 $P_{21}\gg P_{22}$。

3) 模型三

对于需要长期重复相同路线的乘客，虽然仍会考虑换乘次数，但由于他们经常性地重复相同的路线，因此他们会优先选择更加经济的路线，然后再考虑换乘次数，最后才考虑时间。鉴于费用与换乘次数为主要决定因素，故在此情况下可以忽略时间的影响。为此建立以费用为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层多目标规划模型

$$\min(P_{31}[C_i],P_{32}[N_i]) \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} C_i\geq 0,\\ N_i\geq 0,\end{array}\quad i=1,2,3,\cdots,n,$$

其中 P_{31}，P_{32} 为优先因子，且 $P_{31} \gg P_{32}$。

以上建立的三种模型是针对用户不同的查询要求建立的，模型一适用于大部分人的查询要求，尤其适用于对北京路线不熟的外地和外国乘客，所以在设计自主查询系统时，可以考虑将模型一作为系统默认的查询模型。模型二适用于对时间要求很高的乘客，如赶时间的乘客。模型三适用于对北京路线非常熟悉，且需要经常性重复所查路径的乘客，例如：长期在北京工作，生活的居民。所以在设计自主查询系统时也应顾及到这两类人群，可以考虑将模型二，模型三作为系统备选的查询模型。

6 算法设计

6.1 将交通网络转化为相应的图论模型

将站点抽象为图中的节点，若一个站点可以直达另一个站点(有一条交通线路 l_{ij} 连接这两点)，则我们在图中连一条有向边表示这两站点时直达关系。

对于每条边设计两个权值，一个代表乘坐某线路所花费的时间，一个代表乘坐该线路所需要的费用。从而分别得到关于交通网络的时间图和费用图。

6.2 根据图论模型性质及特点确定相应算法

● 以上建立的图是与交通网络一一对应的拓扑图。

BFS 算法 (Broad First Search 广度优先搜索)是通过队列方式-FIFO (First in First out 先进先出)控制扩展节点进而在图中找出从起点到终点的经过最少边的路径。由于 BFS 的这个特性，因此可选择使用 BFS 来求解模型一。

● 由实际情况及我们的建图方法可知，所建立的图是一个边权全部为正的图。

Dijkstra 算法可以在没有负权边的图上求解从一点出发到任意点的最短路，与 Bellman-Ford (求解存在负权边单源点的最短路问题)及 Floyed (求解存在负权边所有节点对之间的最短路径)相比，Dijkstra 算法更适合于本文中的问题。且应用 Heap- 堆的数据结构之后，Dijkstra 算法效率可以达到此问题的求解时间下界[4]，因此我们选用 Dijkstra 算法来求解模型二和模型三。

6.3 算法描述及算法复杂性讨论

◆ BFS 算法：

步骤1 读入交通网络信息，建立相对应的拓扑图。读入要进行求解的出发点和终点，将出发点加入队列。

步骤2 将队首元素出队 (x=Deque (queue))，检查 x 深度。若与目标节点的深度相同则转步骤 4，否则转步骤 3。

步骤3 依次检索由 x 为出发的可扩展节点 $Y = \{y$：可由 x 出发直达$\}$，若符合扩展条件则加入队列：Inque (queue，y)，同时存储其所有的前序节点 (++DAG[y].fa)→ $v = x$，若 y 为目标节点则记录 y 的深度作为目标节点的深度。

步骤4 从目标节点出发，回溯通过 DAG[] 结构所存储的全部前序节点，到达出发点后输出所经过的路径。即得到从起始点到达目标节点的所有换乘次数最小的路线。再根据第二优先层目标函数，求出所得到的各条路线的目标函数值，选取目标值最小的一条作为最佳路线。

现讨论 BFS 算法复杂度。分析可得 BFS 算法遍历图所有边一次的时间为其运行的主要耗费时间，因此若图中有 m 条边则算法的运行时间为 $O(m)$。由于题中图的边数约为60万，故在现有常规硬件条件下可在0.1秒内出解，而其所占空间约为 50M，因此应用该算法的效果非常好。

◆ Dijkstra 算法：

步骤1　读入交通网络信息，建立相对应的时间图(费用图)。读入要求解的出发点和目的地，将出发点加入堆中。

步骤2　若堆为空，即 $heap_{size}=0$，则转步骤4，若不为空则取堆顶元素 $pop_{heap}(h)$ 到 x 中。堆大小减一，即 $heap_{size}$ 减一。

步骤3　依次检索由 x 出发的可扩展节点 $Y=\{y$：可由 x 出发直接到达$\}$。若满足以下情况之一，则把 y 的值更新为新的值，并存储到 y 的父节点 father $[y]=x$；

1)　到 x 的值加上从 x 到 y 的边的权重小于 y 原有的值；

2)　到 x 的值加上从 x 到 y 的边的权重等于 y 原有的值，且到 x 节点的换乘次数加一小于 y 节点当前的换乘次数。

若 y 在堆中则调用 $modify_{heap}\ (h,y)$ 修改 y 节点的权值；若 y 不在堆中则将 y 节点加入堆 $push_{heap}\ (h,y)$，堆的大小增加一即 heap-size++。

步骤4　从目标节点出发，通过 father[] 结构存储的父结点回溯到达出发点后输出路径。

由于在算法执行过程中我们会在所有权值最小的结果中选择存储深度最小的节点，因此最后的结果是以时间(费用) 最少的情况下，满足换乘次数最少的方案。

现讨论 Dijkstra 算法的复杂度。步骤2要求找出在可扩展节点中权值最小的节点作为下一个扩展节点，如果线性存储则支持这个询问的时间耗费为 $O(n)$，我们在这里使用了堆的结构把线性数据组织为树形数据，使得查询操作的时间耗费与树的深度成正比，所以时间耗费降为 $O\ (\log n)$。算法求解出到所有节点的最短路径，共有 n 个节点，求出每个节点的耗费均为 $O\ (\log n)$，故算法总的时间耗费为 $O\ (n*\log n)$。

7　问题求解

7.1　问题一：仅考虑公汽线路

仅考虑公汽线路的交通网络为

$$G_1=\{V_1,L_1,\omega_1(V_1),\psi_1(L_1)\},$$

其中 V_1 为所有公汽站点

$$L_1=\{L001,L002,L003,\cdots L520\},$$

$\omega_1(V_1)$ 所有站点的各类权值：

费用权值：0；

时间权值：当在这个站点不换乘(即 l_{ij} 不改变)，权值为 0；当在这个站点换乘时，权值为5。

换乘权值：当在这个站点不换乘，换乘权值为0，当在这个站点换乘时，换乘权值为1。

$\psi_1(L_1)$ 线路的各类权值：

费用权值：单一票制的线路：1元；

分段计价的线路：$0\sim20$ 站1元；$21\sim40$ 站2元；40站以上3元。

时间权值：每段线路(相邻站点间部分)时间权值为3。

换乘权值：0

将问题一中的公汽网络用标准交通网络图形式表示后，便可运用模型一，模型二，模型三及相应算法编写程序进行求解。模型一中取 $\alpha=\beta=0.5$，求得结果见下表1。(限于篇幅具体路线略，表中"时间"不包括起始站点处的3分钟等车时间。)

表1: 问题一求解结果

起讫点	模型一(换乘)			模型二(时间)	模型三(费用)
	换乘次数	费用(元)	时间(分)	时间(分)	费用(元)
$S3359 \to S1828$	1	3	101	64	3
$S1557 \to S0481$	2	3	106	99	3
$S0971 \to S0485$	1	3	128	103	3
$S0008 \to S0073$	1	2	83	59	2
$S0148 \to S0485$	2	3	106	102	3
$S0087 \to S3676$	1	2	65	46	2

7.2 问题二：考虑公汽与地铁线路

虽然公汽站点与地铁站点是相互分隔的，但是地铁站点和与其相邻的公汽站点之间可以相互换乘，因而可考虑将地铁站点及其相邻公汽站点合并为一个站点，称之为等效站点。

等效站点处有五种换乘方式：公汽—公汽，公汽—地铁，地铁—公汽，地铁—地铁，公汽—地铁—公汽。各种换乘方式的所对应的站点时间权值都不相同。

当两个等效站点之间存在公共的公汽站点时称这种等效点间的关系为近相邻站点。相当于两个站点相隔很近，而且存在快捷线路，如 S0540—S0540 是两个等效站点 D17，D31 之间的快捷线路，其耗时，费用都为0。从快捷线路转公汽，地铁线路算一次换乘。

问题二的交通网络是在问题一的网络上增加了一种交通工具，并使得站点的换乘方式多样化。它同样可用标准交通网络图形式表示。运用相同方法求解，可得结果见下表2。

表2: 问题二求解结果

起讫点	模型一(换乘)			模型二(时间)	模型三(费用)
	换乘次数	费用(元)	时间(分)	时间(分)	费用(元)
$S3359 \to S1828$	1	3	101	64	3
$S1557 \to S0481$	2	3	106	99	3
$S0971 \to S0485$	1	3	128	95	3
$S0008 \to S0073$	1	2	83	53.5	2
$S0148 \to S0485$	2	3	106	86.5	3
$S0087 \to S3676$	0	1	50	36	1

7.3 问题三：考虑公汽，地铁和步行线路

由于步行与常规的交通工具如公汽，地铁在性质上有所差异，因而需要对它作出适当的处理，将它转化成与公汽，地铁等一致的一种交通工具。

对步行的处理：

(a) 任何两个站点间可以通过步行直达，而且直达路线很多，选择其中耗时最小的一条步行路线作为两站点间的直达线路。这条线路称为等效线路。由此可知，任何两站点之间都存在一条的等效线路，对于有 n 个站点的公汽—地铁交通网络，添加 $n^2 - n$ 条等效线路后，就形成了一个有 n 个站点的公汽—地铁—步行交通网络。乘客在选择步行时，只能走等效线路。即对于步行这种交通工具来说，所有的等效线路就是它的交通线路。

(b) 等效线路耗时较多，但费用为0，且任一等效线路转车次数都为0。但是步行会有隐性费用，例如步行会消耗大量体力，而乘车则不会。且步行要自己识路，容易走弯路，甚至会道路拥挤不便行走等等，这些都是换乘要面对的主要问题，即步行中含有隐性换乘次数。为此引入虚拟费用 C_V，虚拟换乘次数 N_V 来体现隐性费用，隐性换乘次数。易知 C_V, N_V 都与等效线路耗时 T_W 成正相关关系。令 $C_V = \phi_C(T_W)$，$N_V = \phi_N(T_W)$，则每条等效线路 B_i 都有三个权值 C_{Vi}，T_{Wi}，N_{Vi}。虚拟费用与一般费用等价，虚拟换乘次数与一般换乘次数也是等价的。

通过引入等效线路及其权值之后，就把步行转化成了一种新的交通工具，并可得到其交通线路。问题三的交通网络就是在问题二的网络中增加一种新的交通工具，它也符合标准交通网络图的的形式，故可用同样的方法进行求解。

8　模型改进

模型一中将换乘次数作为具有绝对优先权的目标来看待，这主要是考虑到奥运期间会有大量的外来人口来到北京，由于对北京路线陌生，他们会首要选择最简便的出行路线，即换乘次数最少。此外奥运会期间北京的人口会剧增，交通也会更加拥挤。在这种情况下，换乘越少，出行就越方便，因此大部分人也会倾向于选择换乘次数的出行路线。但是在非奥运会期间，乘客也许会为了快一点到达目的地或者省几块钱而选择多转一两次车。

为了使模型能够同样适用于非奥运会期间的情况，则需对模型一进行改进。

借鉴分层多目标规划中的分层评价法的思想[1]，在模型一的基础上作如下改进：

1) 对第一优先目标换乘次数给予一个宽容限 k。若由起点到终点的最小换乘次数为 $N_{\min}$，则将换乘次数 $N \in [N_{\min}, N_{\min}+k]$ 的所有路线作为第二优先目标的可行域。

2) 第二优先目标为综合考虑换乘次数 N，总耗时 T，费用 C 的目标函数。当路线的 $N_i > N_{\min}$ 时，则只有它在总耗时 T_i 及费用 C_i 上有明显优势的情况下才会选择它。为了量化换乘次数对时间费用优势程度的要求，引入附加耗时 T_{ai}，附加费用 C_{ai}。将此路线上 $N_i - N_{\min}$ 对路线选择的影响通过附加耗时，附加费用来体现。则

转化后的路线的总耗时：$T_i' = T_i + (N_i - N_{\min})T_{ai}$。

转化后的路线的总费用：$C_i' = C_i + (N_i - N_{\min})C_{ai}$。

将 T_i', C_i' 代到模型一的 $f(T_i, C_i)$ 中得

$$g(T_i, C_i, N_i) = f(T_i', C_i') = \alpha\frac{T_i + (N_i - N_{\min})T_{ai}}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i + (N_i - N_{\min})C_{ai}}{C_{\min}},$$

化简得

$$g(T_i, C_i, N_i) = \alpha\frac{T_i}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i}{C_{\min}} + (N_i - N_{\min})\Big(\alpha\frac{T_{ai}}{T_{\min}} + \beta\frac{C_{ai}}{C_{\min}}\Big),$$

令 $\gamma_T = \frac{T_{ai}}{T_{\min}}$，$\gamma_C = \frac{C_{ai}}{C_{\min}}$，则有 N, T, C 的综合目标函数

$$g(T_i, C_i, N_i) = \alpha\frac{T_i}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i}{C_{\min}} + (N_i - N_{\min})(\alpha\gamma_T + \beta\gamma_C),$$

其中 $\alpha + \beta = 1 \alpha \geq 0$，$\beta \geq 0$，$\alpha$，$\beta$ 体现乘客对总耗时，费用的重视程度。$\gamma_T \geq 0$，$\gamma_C \geq 0$，γ_T，γ_C 都体现乘客对于换乘的重视程度，γ_T，γ_C 越大，表示乘客对换乘越重视，当 γ_T，γ_C 足够大时，则相当于模型一中的对换乘次数绝对优先考虑。综上所述，可得改进后

的模型

$$\min(g(T_i, C_i, N_i))$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} N_i \in [\min(N_i), \min(N_i) + k] \\ N_i \geq 0, \\ T_i \geq 0, \\ C_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

9 模型评价

本文在标准交通网络图上，综合考虑多方面的因素建立最佳路线选择模型，并设计出相应的求解算法。最后将建立的模型应用的具体问题的求解中去。因而模型具有如下优点：

1) 模型的通用性很强。模型是建立在一个抽象交通网络图上，因而适用于现实中的多种交通网络。

2) 模型考虑很全面。抽取了乘客在选择路线时主要考虑的三个因素，然后根据不同类型的乘客提供不同的路线选择模型。

3) 对于模型的求解，采用高效的算法和先进的数据结构，使得查询时间很短，实时性很强，能够随时根据最新数据快速给出查询结果。

参考文献：

[1] 湖北省大学生数学建模竞赛专家组. 数学建模[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2006
[2] 韩传峰，胡志伟. 城市公交网络性能评估的网络图方法[J]. 系统工程，2003, 21(3): 58-61
[3] 赵巧霞，马志强，张安. 以最小换乘次数和站数为目标的公交出行算法[J]. 计算机应用，2003, 24(12): 136-137
[4] Thomas H, Cormen, Charles E, Leiserson, Ronald L, Rivest, Clifford Stein. Introduction to Algorithms (Sencond Edition)[M]. American: The MIT Press, 2001

Optimization Models for the Bus Route Selection

ZHOU Jin-jian, YAN Dong, TANG Rui
Advisor: Instructor Group

(Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: In this paper, under the background of Beijing Olympics, we propose a model to optimally choose the bus route. Firstly, we utilize the multi-objective optimization to establish three selecting-route models, respectively, by taking the times of transferring, the cost of time and the consumption of money as the most important factor, on account of different out-goers with varied purposes. Furthermore, on the basis of this model's characteristics, we carry out corresponding mathematical methods to solve the problems. More concretely, we adopt the BFS algorithm to deal with the first model and handle the second and the third model by the aid of Dijkstra algorithm. Particularly, by using the Dijkstra algorithm, we convert the linear structure data into tree structure data. Consequently, we reduce the time complexity from O(n^2) to O(n*logn). Finally, we show the solutions of the three problems by using the developed models and algorithm.

Keywords: multi-objective optimization; bus route selection; BFS algorithm; Dijkstra algorithm

文章编号:1005-3085(2007)08-0103-07

最优公交线路选择

郝晓磊， 李 煜， 兰名荥
指导教师： 贺祖国
(北京邮电大学，北京 100876)

编者按： 本文在建立了公交网络图的基础上，分别建立了基于点搜索的多目标优化模型与基于线搜索的双目标优化模型，前者可由改进的 Dijkstra 算法求解，而后者为依换乘次数增加的递归算法。接近最优的实例计算结果反映了本文模型的有效性与作者较强的编程能力。节点拆分是本文的一个亮点，如此处理后便将换乘时间纳入到了一个经典的最短路问题中。另外，对地铁线路的处理也有其独到之处。对两种模型的长短处的比较不够充分，是本文最大的缺陷。

摘 要： 针对公交线路选择问题，考虑到公交系统的两个基本要素—站点与线路，本文分别建立了基于点搜索的多目标优化模型和基于线搜索的双目标优化模型。前者通过建立有向图，将站点转化为图中的节点，将票价、时间、换乘这3种信息转化为节点间的权值，之后按照省时、省钱、换乘少这三个目标的三种不同优先次序逐点搜索，分别寻找最佳路径，给出了三组不同的解答。对于后者，我们以换乘次数作为约束条件，将时间与金钱作为目标建立了双目标的优化模型，第一问分为0，1，2次换乘三种情况求解，第二问分为借助地铁和不借助地铁两种情况求解。

关键词： 点搜索；线搜索；双目标优化；多目标优化

分类号： AMS(2000) 90C29　　**中图分类号：** O221　　**文献标识码：** A

1 问题分析

1.1 问题一

1. 实际问题的抽象：

为了求出起始站点与目的地站点间的最佳路径，将公汽站点抽象为结点，将公汽线路抽象为连接线路各站点的有向边，构造一公交网络有向图，用边上的权值反映行驶时间、换乘时间和票价等信息，从而将求解最佳路径问题转化为求解图中起始节点与目的地节点间的最短路径的问题，建立基于点搜索的多目标优化模型，运用改进的 Dijkstra 算法[1]求解。

2. 等价节点的引入：

如果同一个公汽站点有多条线路经过，则将该站点对应的节点拆分成多个等价节点，等价节点的数目与通过该站点的线路数目相同。用等价节点之间的权值大小反映换乘时间和票价等信息。如图1所示。

1.2 问题二

地铁线路与公汽线路一样，可以在图中用节点表示地铁站点，用节点间的有向边表示地铁线路的方向，用边上的权值反映行驶时间、换乘时间和票价等信息，但地铁线路对应的权值与公汽的权值不一样。

又由于给出的数据中地铁线路 T1 和 T2 都经过站点 D12 与 D18，所以也要把站点 D12 和 D18 分拆成等价节点。

然而第二问相较于第一问最大的不同在于需要考虑公汽与地铁的换乘，这可以分为以下3种情况：

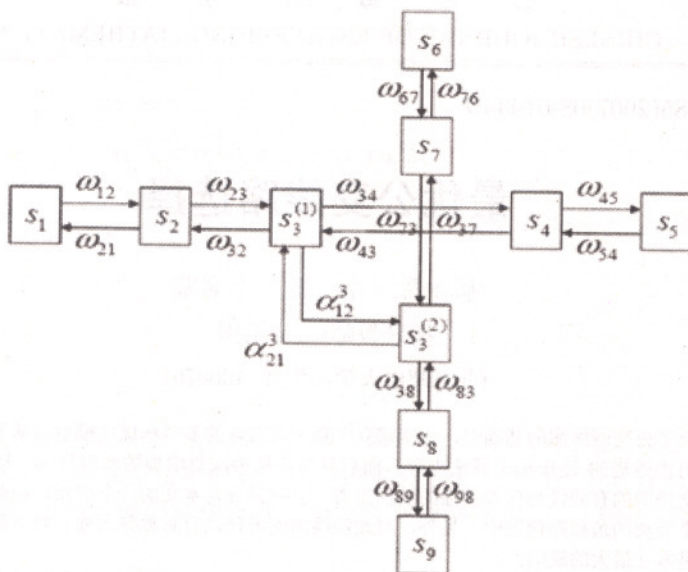


图 1: 同一站点有多条公汽线路经过图形

1) 从一公汽站点，经地铁站点(不乘坐地铁)，到达另一个公汽站点，称此为“穿越”；
2) 从一公汽站点到对应换乘的地铁站点，乘坐地铁，称此为“进站”；
3) 从一地铁站点到对应换乘的公汽站点乘车(刚刚乘坐过地铁)，称此为“出站”。

由于出现了以上3种情况，需要修改第一问的部分图形结构，主要是修改公汽与地铁相接的节点与权值。

在修改完成后，问题依然是求解最佳路径，同样是建立基于点搜索的多目标优化模型，用改进的 Dijkstra 算法求解模型。

2 基于点搜索的多目标优化模型

2.1 问题一

2.1.1 符号约定

M N	分别表示公汽线路总数 公汽站点总数
$G(S,E)$	由所给数据抽象而成的有向图
S E	分别表示有向图中所有节点组成的集合 有向图中所有有向边
$A=(a_{ij})_{N\times N}$	有向图 $G(S,E)$ 对应的邻接矩阵
s_i	编号 i 的站点对应的节点。其中 s_A 为起始节点，s_B 为目的地节点
$s_i^{(m)}$	节点 s_i 拆分后，第 m 个等价节点的符号
ω_{ij}	节点 s_i 指向节点 s_j 的权值，反映行驶时间和票价等信息
$\alpha_{mn}^{(i)}$	节点 s_i 拆分后，第 m 个等价节点 $s_i^{(m)}$ 指向第 n 个等价节点 $s_i^{(n)}$
T	求出的最佳路径上的点列，$T=\{s_A,s_i,\cdots,s_x,\cdots,s_B\}$，$s_x\in S$
$L_k=F_k(s_{i1},s_{i2},\cdots)$	由公汽站点序列到公汽线路的映射，程序中此映射用链表结构表示

2.1.2 模型建立与求解

1. 模型建立

目标函数： $\text{Min} = \sum_{s_{ix}\in T}(\omega_{ixiy} + \alpha_{mn}^{x})$

决策变量： $T = \{s_A, s_i, \cdots, s_x, \cdots, s_B\},\ s_x \in S,$

约束条件： $\forall\, i,j\ s_i, s_j \in T\ \&\ i \neq j,\ s_i \neq s_j,$

$\forall\, i,j\ s_i, s_j \in T\ \&\ |i-j| = 1,\ a_{ij} = 1.$

2. 模型求解

Dijkstra 算法的改进：应用传统的 Dijkstra 算法求解，算法时间长，时间复杂度为 $o(n^2)$，当站点数 n 很大时，运行时间长。针对时间复杂度的改进，同时要更好的满足多目标优化模型，我们提出基于优先队列改进的 Dijkstra 算法。在 C++ 程序[2]中，我们以二权堆来实现，进行每次结点扩展时，根据价格、时间、换乘的优先级进行扩展，算法时间复杂度为 $o\,(n\log_2 n)$，站点数 n 越大，优越性越明显。

本模型运用改进的 Dijkstra 算法求解，得到三组解。他们是根据查询者的3种不同需求，即换乘次数尽量少、总计耗时尽量少、总计票价尽量少(按照3种需求的优先级递减顺序排列)得出的。

对于“换乘次数尽量少–总计耗时尽量少–总计票价尽量少”的情况，有：

1) 将图中所有节点(等价节点除外)间权值 ω_{ij} 赋值为0，将等价节点间权值 $\alpha_{mn}^{(i)}$ 赋值为1，运行改进的 Dijkstra 算法；

2) 如果待探测的不同节点权值累加相同，则优先考虑总计耗时较少的节点；

3) 如果总计耗时也相同，则优先考虑总计票价较少的节点；

4) 如果总计票价还相同，则认为最佳路径有多条；

5) 由最佳路径的节点序列 T 以及由公汽站点序列到公汽线路的映射 $L_k = F_k(s_{i1}, s_{i2}, \cdots)$ 反推最佳路径的乘坐线路和换乘节点。

“总计耗时尽量少–换乘次数尽量少–总计票价尽量少”与“总计票价尽量少–换乘次数尽量少–总计耗时尽量少”的步骤与上类似，在此不赘述。

2.2 问题二

2.2.1 符号补充

公汽换乘公汽平均耗时，$t_{11} = 5$	公汽换乘公汽其中的步行时间，$t'_{11} = 2$
地铁换乘地铁平均耗时，$t_{22} = 4$	地铁换乘地铁其中的步行时间，$t'_{22} = 2$
地铁换乘公汽平均耗时，$t_{21} = 7$	地铁换乘公汽其中的步行时间，$t'_{21} = 4$
公汽换乘地铁平均耗时，$t_{12} = 6$	公汽换乘地铁其中的步行时间，$t'_{12} = 4$

2.2.2 图形改动

以下举例说明怎样改动图中公汽与地铁相衔接的部分。其中用数字标号的节点表示公汽站点，用字母标号的节点表示地铁节点；a_1 与 a_2 表示同一个地铁站点分拆之后形成的等价节点；虚线框范围内表示公汽与地铁相衔接的部分。节点间的权值以所耗时间赋值。

1. 如果衔接部分所包含的节点不是起始节点或目的地节点，修改之后的图形如图2：

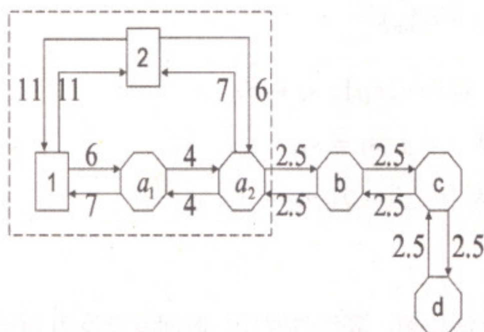


图2: 衔接部分所含节点非起始节点或目的节点图

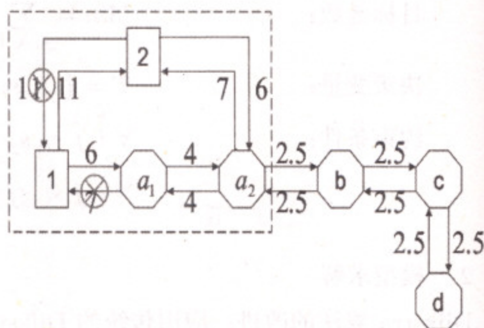


图3: 衔接部分所含节点是起始节点图

1) 穿越：从公汽节点1经过地铁等价节点 a_1 到达公汽节点2，之后乘坐公汽，其间并没有乘坐地铁，所以权值为 $t'_{12}+t_{21}=11$。

2) 进站：从公汽节点1到地铁等价节点 a_1，之后乘坐地铁，所以权值为 $t_{12}=6$。

3) 出站：从地铁等价节点 a_1 到公汽节点1，之后乘坐公汽，所以权值为 $t_{21}=7$。

4) 其他：地铁等价节点 a_1 到 a_2 的权值为 $t_{22}=4$，地铁不同站点之间时间权值为2.5

2. 如果衔接部分所包含的节点是起始节点或目的地节点，修改之后的图形如图3:

1) 穿越：从公汽节点1经过地铁等价节点 a_1 到达公汽节点2，之后乘坐公汽，其间并没有乘坐地铁，所以权值为 $t'_{12}+t_{21}=11$，但是由于节点1是起始节点，所以没有节点2到节点1的边。

2) 出站：由于节点1是起始节点，所以没有等价节点 a_1 到节点1的边。

注 衔接部分所含的节点是目的地节点的修改图与此类似，在此不再赘述。

3 基于线搜索的双目标优化模型

3.1 问题一

3.1.1 模型建立

假设换乘次数不超过两次，我们可以分别求出换乘一次，两次和不换乘时的最优解，再从这三者中取最优解。

第一目标

$$\text{Min } P(A,B)=\begin{cases} Z_{AB}, & k_1=0,\\ Z_{AX}+Z_{XB}, & k_1=1,\\ Z_{AX}+Z_{XY}+Z_{YB}, & k_1=2.\end{cases}$$

第二目标 Min$Q$

其中 $P(A,B)$ 表示从 A 到 B 的时间，Z_{ij} 表示从 i 直达 j 的最短时间，而 $Q(A,B)$ 表示从 A 到 B 所支出的交通费用，k_1 表示换乘次数。此外，下文用到，Z' 表示两站点间最快的公汽线路，C_{ls} 表示 s 在线路 l 上的第几站。

3.1.2 模型求解

1. 无须换乘直接给出结果 Z'_{AB}。

2. 换乘一次

1) 寻找在起点可乘坐的所有线路 L_A，$L_A=\{l\,|C_{lA}\neq 0\}$。

2) 寻找从 A 出发，乘坐 L_A 各个线路，能到达的所有车站 S_A，$S_A=\{s\,|Z'_{As}\neq L_A\}$。

3) 由上可知，当 $X\in S_A$，$Z'_{XB}\neq 0$ 时，所有 $A-X-B$ 都为可到达路径。然后，我们计算所有路径中，$Z_{AX}+Z_{XB}$ 最小者，即为所求路径。

3. 换乘两次

1) 寻找 L_A，以及可到达中点的所有车次 L_B，$L_B=\{l\,|C_{lB}\neq 0\}$。

2) 寻找 S_A，以及车站集合 $S_B=\{s\,|Z'_{sB}\in L_B\}$，从这些车站出发，乘坐 L_B 可达终点 B。

3) 由上可知，当 $X\in S_A$, $Y\in S_B$, $Z'_{XY}\neq 0$ 时，所有 $A-X-Y-B$ 都为可到达路径。然后，我们计算所有路径中，$Z_{AX}+Z_{XY}+Z_{YB}$ 最小者，即为所求路径。

3.2 问题二

我们分别求出借助地铁和不借助地铁时的最优解，并从这两者中取较优者。

1. 不借助地铁的模型

第一目标

$$\text{Min } P(A,B)=\begin{cases} Z_{AB} & +k_1\times 3+k_2\times 8,\quad k_1=0,\\ Z_{AX}+Z_{XB} & +k_1\times 3+k_2\times 8,\quad k_1=1,\\ Z_{AX}+Z_{XY}+Z_{YB} & +k_1\times 3+k_2\times 8,\quad k_1=2.\end{cases}$$

第二目标Min$Q$

其中，k_1 为换乘次数，k_2 为穿越地铁的次数。

2. 借助地铁的模型

$$\text{Min } P(A,B)=\begin{cases} Z_{AB}+\ T_{XY}+Z_{YB} & +\ 6+7+k_2\times 8,\quad A\notin X\ \&\ B\notin Y,\\ \qquad\ T_{XY}+Z_{YB} & +\ 6+7+k_2\times 8,\quad A\in X\ \&\ B\notin Y,\\ Z_{AX}+\ T_{XY} & +\ 6+4+k_2\times 8,\quad A\notin X\ \&\ B\in Y,\\ \qquad\ T_{XY} & +\ 6+4+k_2\times 8,\quad A\in X\ \&\ B\in Y,\end{cases}$$

其中 $B\in Y$ 表示终点是临铁站点，$A\in Y$ 表示起点是临铁站点。T_{XY} 表示乘坐地铁，经最佳路径从 X 到 Y 所花费的时间。

4 结果

在本文的最后，我们给出此题的完整解答。以下对表格做一些简单的说明。方案1为“换乘次数尽量少–总计耗时尽量少–总计票价尽量少”；方案2为“总计耗时尽量少–换乘次数尽量少–总计票价尽量少”；方案3为“总计票价尽量少–换乘次数尽量少–总计耗时尽量少”。

第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0110-05

"乘公交，看奥运"参考解答

方沛辰[1]， 吴孟达[2]

(1- 吉林大学数学学院，长春 130012； 2- 国防科技大学理学院，长沙 410073)

摘 要: 本文对2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题给出了一个比较详细的解答与说明。

分类号: **AMS**(2000) 90C11 **中图分类号**: O221 **文献标识码**: A

1 问题分析

本题根据公交线路查询系统研制的实际需求简化改编而成。问题容易理解，相关参考文献也较多，但涉及到公汽与地铁线路的联系，以及换乘时间等细节的处理，加上需要处理的数据量较大，问题并不十分简单。这是一个多目标优化问题，换乘次数最少、费用最省、时间最短显然是乘客在选择乘车线路时最关心的几个目标，从该问题的实际背景来看，采取加权合成将问题转化为单目标优化问题的解题思路不太合适。比较适当的方法是对每个目标寻求最佳线路，然后让乘客按照自己的需求进行选择。

2 直达矩阵建立

不考虑地铁：首先建立直达矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，

$$a_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i=j,\\ \infty, & i \text{ 到 } j \text{ 无直达车},\\ l_{ij}, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 n 为公汽站点个数，在本题中 $n=3957$，l_{ij} 表示由 i 站点直达 j 站点付出的代价，可以为时间或费用，根据 l_{ij} 的意义不同，可分别称 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵或直达费用矩阵。注意 $A^{(0)}$ 不是对称矩阵。

考虑地铁：与上类似建立"直达"矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，其中 n 为公汽站点个数+地铁站点个数，在本题中 $n=3957+39=3996$。当 i 站点与 j 站点同为公汽站点或同为地铁站点时，$a_{ij}^{(0)}$ 之定义与上面定义相同；当 i 站点与 j 站点中一个为公汽站点、另一个为地铁站点时，分为以下情形：

1) i 站点是公汽站点，j 站点为地铁站点：

 1.1) 若 j 站点不是 i 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，则令 $a_{ij}^{(0)}=\infty$。

 1.2) 若 j 站点是 i 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，设 t站点为公汽线 j 路 L 与地铁线的公汽换乘站点

 若 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{it}^{(0)}+t$ 站点与 j 站点间的步行时间；

 若 $A^{(0)}$ 为直达费用矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{it}^{(0)}$。

2) j 站点为公汽站点，i 站点为地铁站点：

2.1) i 站点不是 j 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，则令 $a_{ij}^{(0)}=\infty$。

2.2) i 站点是 j 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，设 t 站点为公汽线路 L 与地铁线的公汽换乘站点。

若 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{tj}^{(0)}+i$ 站点与 t 站点间的步行时间；

若 $A^{(0)}$ 为直达费用矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{tj}^{(0)}$。

经过如此处理后，除换乘时间不同，在以下建模与求解过程中，就不必区分站点类型了。

图论描述：用图论语言描述，以上步骤相当于建立了一个带权有向图，图中的点表示站点，图中的弧表示前一站点能够直达后一站点，弧上的权表示前一站点直达后一站点所需付出的代价（时间或费用）。

3 优化目标考虑

从乘客角度考虑，优化目标应是以下三个目标之一：换乘次数最少，费用最省，时间最短。分别考虑对此三个目标的优化，按照第一目标最优，第二、三目标在第一目标最优前提下最优或次优来求解。

4 矩阵算子“⊙”的定义

定义矩阵算子“⊙”如下：设A、B均为 n 阶方阵，

$$C=A\odot B, \tag{1}$$

其中

$$c_{ij}=\min\{a_{ik}+b_{kj}+\delta_{i,j,k}|k=1,2,\cdots,n\}, \tag{2}$$

其中 $\delta_{i,j,k}$ 之定义如下：

当考虑费用矩阵之间运算时，$\delta_{i,j,k}=0$；

当考虑时间矩阵之间运算时，$\delta_{i,j,k}$ 表示换乘时间，具体来说：当 $i=j$ 或 $k=i,j$ 时，$\delta_{i,j,k}=0$；

以下设 $i\neq j$，$k\neq i$，j，当 i，j 为公汽站点而 k 为地铁站点，或者 i，j 为地铁站点而 k 为公汽站点时，令 $\delta_{i,j,k}=\infty$；其它形式有

$$\delta_{i,j,k}=\begin{cases}5, & \text{若公汽换乘公汽,}\\ 4, & \text{若地铁换乘地铁,}\\ 3, & \text{若地铁换乘公汽,}\\ 2, & \text{若公汽换乘地铁.}\end{cases}$$

考虑直达矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，令

$$\begin{aligned}A^{(1)}&=A^{(0)}\odot A^{(0)},\\A^{(2)}&=A^{(1)}\odot A^{(0)},\\&\vdots\\A^{(k)}&=A^{(k-1)}\odot A^{(0)},\\&\vdots\end{aligned}\tag{3}$$

记

$$A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n},\quad k=0,1,2,\cdots$$

由(1)、(2)两式的定义可知：

对直达时间（费用）矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，$a_{ij}^{(1)}$ 表示从 i 站点到 j 站点至多换乘1次能够到达所需的最短时间（最少费用），同理，$a_{ij}^{(k)}$ 表示从 i 站点到 j 站点至多换乘 k 次能够到达所需的最短时间（最少费用）。

5　换乘次数最少

考虑换乘次数最少为第一目标。对直达时间矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$ 按(3)式重复地进行$\odot$运算得到 $A^{(k)}$，当 $a_{ij}^{(k-1)}=\infty$，$a_{ij}^{(k)}\neq\infty$ 时，表示从 i 站点到 j 站点最少换乘 k 次能够到达，且 $a_{ij}^{(k)}$ 即表示换乘 k 次到达所需的最短时间。在运算过程中可记录下换乘站点信息，随之可得到相关线路信息。若有若干条最小换乘线路，则比较另外两个目标选择最佳线路。

6　费用最省

考虑费用最省为第一目标。对直达费用矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$ 按(3)式重复地进行$\odot$运算得到 $A^{(k)}$，运算适当次数后若 $A^{(k)}=A^{(k-1)}$，则表示已得到所有站点间的最小费用，$a_{ij}^{(k)}$ 即表示从 i 站点到达 j 站点所需的最少费用。在运算过程中可记录下换乘站点信息，随之可得到相关线路信息。若有若干条最小费用线路，则比较另外两个目标选择最佳线路。

以上算法本质上相当于图论中求所有点对间最短路的 Floyd 算法，也可以应用求已知点对间最短路的 Dijkstra 算法解决此问题。

7　时间最短

考虑时间最短为第一目标。对直达时间矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$ 按(3)式重复地进行$\odot$运算得到 $A^{(k)}$，运算适当次数后若 $A^{(k)}=A^{(k-1)}$，则表示已得到所有站点间的最短时间，$a_{ij}^{(k)}$ 即表示从 i 站点到达 j 站点所需的最短时间。在运算过程中可记录下换乘站点信息，随之可得到相关线路信息。若有若干条最短时间线路，则比较另外两个目标选择最佳线路。

以上算法大体相当于图论中求所有点对间最短路的 Floyd 算法，只是要多考虑一个换乘时间因素，故可称为改进的 Floyd 算法。

8　已知所有站点间步行时间的优化模型

同一公交线的往返路线视为两条单行线，记共有 m 条单行公交线，构造一个 $m+2$ 个点构成的完全图。其中 a 为起点（出发点），b 为终点（目的地），此外每条公交线也视为一个点，边表示两点之间有步行关系。步行时间为边权，针对不同的边可分为上车前、下车后和换车时步行时间，构成步行时间矩阵 $(s_{ij}) = S_{(m+1)\times(m+1)}$。行依次表示的是 m 条公交线与起点，列依次表示的是 m 条公交线与终点。

每个公交线点还有三个信息为点权：

1). 公交线名称及上行或下行；

2). 类型 $E = \begin{cases} L, & \text{公汽} \\ T, & \text{地铁} \end{cases}$ 及票价方式；

3). 乘车站数表矩阵 $G^i = (g^i_{cd})_{(m+1)\times(m+1)}$，$i = 1,\cdots,m$，其中 g^i_{cd} 表示从 c 到 d 经过 i 号公交线时需要乘车的站数，c 到 d 利用不上 i 时 g^i_{cd} 取无穷大。这个矩阵的行列表示同 S。

于是原问题转化为在这个图上求 a 到 b 的最短路，最短的概念可以是经过的点数最少，乘车的总站数最少，总的步行时间最少，总车费最少这样几个目标的各种组合方式。

先进行一些预备的计算。

8.1)　上车前步行时间，即起点到各公交线及终点的步行时间（共 $m+1$ 个）

从 a 到第 c 条公交线的第 k 站的步行时间记为 t_k，$k = 1,2,\cdots,l_c$，则

$$s_{m+1c} = \min\{t_k, k = 1,\cdots,l_c\}$$

且对应站号 $k^* = k^c_a$，$c = 1,\cdots,m+1$.

8.2)　换车步行时间，即两条公交线间步行时间（不一定为零共 $m\,(m-1)$ 个），

对第 c 条公交线与第 d 条公交线的任何两站之间的步行时间取最小，得

$$s_{cd} = \begin{cases} \min\{s_{ij}, i = 1,\cdots,l_c, j = 1,\cdots,l_d\}, & c \neq d, \\ 0, & c = d, \end{cases} \quad c,\ d = 1,\cdots,m.$$

同时得到两条公交线上的分别两个站号即为换乘的两个站

$$(i^*, j^*) = (i_c, j_d), \quad 1 \le c, \quad d \le m.$$

8.3)　下车后步行时间与上车前步行时间计算类似，可得到 s_{dm+1}，$k^* = k^d_b$，$d = 1,\cdots,m$。至此步行时间矩阵 S 全部算出。

8.4)　利用上面关于　K^c_a　$(\mathrm{i}_c, \mathrm{i}_d)$　K^d_b　的结果，计算全部

$$G^i = (g^i_{cd})_{(m+1)\times(m+1)}.$$

可以用0-1整数规划解决这个问题，方法是分出恰乘一次公交车，恰乘两次公交车，恰乘三次公交车，恰乘四次公交车四种情况分别求出最优解然后比较得出最优解。

恰乘一次公交车的模型如下：变量全部是0-1变量，共有 $3m$ 个

$x_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择去第 i 条公交线的路；

$y_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择乘第 i 线公交车；

$z_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择从第 i 条公交车下车后走到目的地的路。

它们都是取 1 表示选择而取 0 表示不选择。约束共 $2m+1$ 个：

$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1$ 含义是只选择一条公交线，

$y_i \le x_i$, $y_i \le z_i$, $i=1,\cdots,m$，含义是要乘第 i 条公交线就要走相应的两条路。

不同的人会有不同的需求，比如退休的人出行时主要考虑怎样能更节省路费；出差到外地的人主要考虑怎样能更节省时间；带东西多的人不怕运行的站数多，就怕总换车和步行的距离长等，但有一些属公共的要求比如希望少换车、花钱少、总的时间少、尽量有座和不能走太远的路等，需具体情况具体分析。

目标函数据用户选择的情况用点权和边权构造，共同点都是取最小值。例如：

步行时间最少时目标函数可取为

$$\min \sum_{c=1}^{m} S_{m+1,c}x_c + \sum_{d=1}^{m} S_{d,m+1}z_d,$$

总时间最少时目标函数可取为

$$\min \left\{ \sum_{c=1}^{m} S_{m+1,c}x_c + \sum_{d=1}^{m} S_{d,m+1}z_d + \sum_{i=1}^{m} y_i g^i_{m+1,m+1} v^i_E + \sum_{i=1}^{m} y_i w^i_E \right\},$$

其中

$$v^i_E = \begin{cases} 3, & E=L, \\ 2.5, & E=T, \end{cases} \qquad w^i_E = \begin{cases} 3, & E=L, \\ 2, & E=T, \end{cases}$$

车费最小时目标函数可取为

$$\min F = \begin{cases} 3, & E=T, \\ 1, & E=L,\ \text{单一}, \\ \left\lceil \dfrac{\sum_{i=1}^{m} y_i g^i_{m+1,m+1}}{20} \right\rceil, & E=L,\ \text{分段}. \end{cases}$$

恰乘两次公交车的模型类似上面，区别是有三条路和两线公交车，所以变量和约束都多一些而已。恰乘三次以上依次类推。

概括起来这个核心算法是建立图论模型，针对不同的目标函数用求解 0-1 规划的方法多层次解决。

"Public Transportation Routes Selection" Reference Explanation

FANG Pei-chen[1],　WU Meng-da[2]

(1- School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012;
2- School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract: This paper provides a comparatively detailed answer and explanation about "Gao Jiao She" Cup Nation's Undergraduate Mathematical Modeling Contest question B in 2007.

第24卷 增刊2
2007年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0115-02

“乘公交，看奥运”评阅综述

方沛辰[1]， 吴孟达[2]

(1- 吉林大学数学学院，长春 130012; 2- 国防科技大学理学院，长沙 410073)

摘 要： 本文对2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题的问题实际背景和一般解题方法进行了分析，又对评阅时看到的部分参赛论文中的一些情况做了简单综述。

分类号: AMS(2000) 90C11 **中图分类号:** O221 **文献标识码:** A

公交车换乘这个问题比较特殊，表面看很常见也很简单，可是不能简单地套用哪一个现成的模型就解决。仔细研究后却又会发现，它能用许多模型来描述，几乎处理离散问题的模型都有效，只不过都要伤点脑筋来处理那些细节。阅卷中我们发现，学生们想出了许多实用的处理方法，足见学生们的想象力的丰富。比如寻找最短路的 Dijkstra 算法、Floyd 算法和矩阵算法、集合求交算法、0-1 整数规划、动态规划、分支定界方法、启发式方法等等。真可谓百花齐放，构思奇妙。

很明显，这个题目最容易想到的是可以用图论的方法去思考。但是究竟怎样用对象和对象间的关系表出好这个问题却不是显然的。如果用一条线表示一路公交车，所有的停车站就是这条线上的所有的点，进而把所有的公交线都画在一个图里。这样的图很直观，最接近城市的地图。但是却无法直接使用 Dijkstra 算法和 Floyd 算法，原因就是无法表示换乘关系。有些学生用每张纸画一个公交线，所有的公交线就是很多张纸，相同的站名在每张纸上有固定位置，然后换乘就是在不同的纸间换页。这种方法和前一种方法中每条线用不同的颜色画出是等价的。这种分层的图论模型是可以精确表达这个问题的，可惜太复杂了，也无法形成一个好的数据结构。正确的使用图论的方法是构成直达图：所有站点作为图的全部点，将每条公交线的所有站点间，只要有直达关系就画一条有向边，边权可以表示不同的含义，从而得到有向图。对应的邻接矩阵就是直达关系矩阵，进而还可定义直达时间和直达费用两个权矩阵。在这样一个直达图的基础之上，可以采用许多方法去计算都不是很难的了，可以说这是建立模型的一个好出发点。

问题中没有提出要求，选择什么样的路线为最优，需要学生自己去理解，根据实际情况自己提问题再自己去选择，这是一种尝试，事实证明这次尝试是成功的。绝大多数学生都选择了出行时间、换乘次数和出行费用的最小化，这也就是人们在出行时最常考虑的几个因素，把他们作为优化目标来选择路线是正确的。还有的队考虑了尽量乘坐始发车等目标，虽然这个目标不是很重要的，多数人常在那三个目标之后考虑，但我们注意到这是双赢的选择，也就是乘车人希望乘人少的车，公交系统也希望每辆车人数尽量平均，不要过多和过少，充分发挥车辆的利用率，此时二者的利益是一致的，也就是说于人于己都有利的选择。除了少数队过分强调换乘次数最优先或者自己生成一组权对三个目标进行加权平均来构成目标函数两种做法不大合乎常理外，多数队都是考虑到咨询者可能出于不同的出发点，来选择换乘路线，我们应尽量满足咨询者的需求。所以我们认为最优路线的结果用不同的目标的各种字典序来选择是最好的。

换乘次数是这个问题中的一个敏感问题，明显的一个事实是换乘次数越多时优化算法的复杂度越大，于是超过一半以上的答卷都把换乘次数限制在两次以内。到底应不应该求出换乘4次，也就是乘5部车出行的方案可能是许多学生的疑问。有学生从网上看到一个城市公交系统设计好坏的一个评价标准就是从该城任何一点到该城任何另一点能否最多乘三部车就可到达（即换乘2次），我觉得这与我们的问题无关，关于这一点我想解释一下。

1) 能够乘三部车就到达，并不说明这就是最好的乘车方案，可能耗时很多，费用较高。有可能有乘更多的车会使时间和费用都下降的方案。

2) 为了使题目更加清晰，需要隐去实际的路线名和站名成为大家所见到的样子（我们出题时仅这一工作就耗时近两个月），可这样就失去了站点之间的信息联系，于是很明显换乘的条件是站名必须一样（地铁站附近例外），而我们在处理实际问题时一般常常把两站相距500米之内也看成可直接换乘的，这就使得符合要求的城市公交网变得不合要求。

比如两条公交路线互相垂直，各沿着一条大路运行，相交处往往两条公交线各设一个公交站以利换乘，可是按照公交站名的规定两站由于不是同一个站台不能叫同一名字，于是在我们的题目中就不能换乘了。这样本来可以一次换乘到达就不得不要换乘更多次了。

在许多论文中，计算结果采用列表方式给出一堆结果而不优化筛选是不妥当的。就像别人在向你问路的时候，你应该只告诉一种最好的走法，用不着用“或者”来介绍所有的走法。

用模拟退火、蚂蚁（蚁群）算法之类的启发式算法来解决这个问题是不恰当的，这个问题的规模使得运算量是有些大，可是适当选择一下算法都还是能够比较轻松地求出最优解的，这样的情况下，我们认为能够给出最优解的论文更好一些。今后大家再作数学建模题目时可以把握这样一个原则：问题能够解决时，应选择解决效果最好、最彻底的方法。在解决效果一样时应选择更简单实用的方法。

“Public Transportation Routes Selection” Summary Comments

FANG Pei-chen[1], WU Meng-da[2]

(1- School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012;
2- School of Science National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract: This paper makes some analyses about the real background and general solution to the problem in “Gao Jiao She” Cup Nation’s Undergraduate Mathematical Modeling Contest question B in 2007, and this article also briefly summaries about some instances in received contest papers.

第24卷 增刊2　　工程数学学报　　Vol. 24 Supp.2
2007年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0117-04

公交线路选择模型

蔡志杰[1]，丁颂康[2]

(1- 复旦大学数学科学学院，上海 200433； 2- 上海海事大学基础部，上海 200135)

摘 要: 本文讨论公交线路选择模型，介绍集合求交方法及与之对应的搜索方法。同时给出相应的图论模型，讨论了它们的算法复杂性。

关键词: 集合求交算法；搜索方法；图论模型；算法复杂性

分类号: AMS(2000) 90B20　　**中图分类号**: O157.6　　**文献标识码**: A

1 问题的提出

今年全国大学生数学建模竞赛B题以奥运为背景，考虑公交线路的选择问题，是一道贴合生活实际的赛题。在评阅试卷时，我们发现很多参赛队采用了“集合求交”的方法，在描述了该方法的总体思路后，绝大多数参赛队给出了搜索算法求解这一问题。但是由于搜索算法的计算量很大，这些参赛队大多限制乘客的换乘次数在2次以内，有的参赛队还给出限制2次换乘的心理因素或相关的调查结果。然而在实际的交通网络中，即使像北京这样公交线路比较完善的大城市，也会有需要换乘3次或3次以上的站点，因此2次换乘这一约束条件会导致在某些情况下出现无解的结果，这是不合理的。那么，在没有换乘限制的约束条件下，集合求交算法是不是不能用了呢？其算法复杂性是不是非多项式的？本文主要讨论这种方法的算法复杂性及其相应的搜索方法和图论模型[1-3]。最后说明采用搜索算法，可以在很短的时间内求出最优解。

2 集合求交算法

首先引入一些记号，记 N 为公交站点总数(约为4000)，L 为公交线路(包括公汽和地铁)总数(约为500)，Δ_l 为经过每个车站的公交线路数(平均约为15)，Δ_s 为每条线路上的车站数(平均约为40)。将所有公交线路视为单行线，双行线拆分成两条单行线，环线也视为两条单行线。

记 p 为起始站，q 为终点站。集合求交算法可以描述如下：

令 $L_p^{(0)}=\{l\mid p\text{ 在公交线路 }l\text{ 上}\}$，$L_q^{(0)}=\{l\mid q\text{ 在公交线路 }l\text{ 上}\}$，则 $L_p^{(0)}\cap L_q^{(0)}$ 表示 p，q 在同一条线路上的公交线路集合。若公交线路 l 上的站点从起点到终点按次序依次记为 $s_1,s_2,\cdots,s_m$，则 $A^{(0)}=\{l\mid l\in L_p^{(0)}\cap L_q^{(0)},p=s_i\in l,q=s_j\in l,i<j\}$ 即为从站点 p 可直达站点 q 的公交线路集合。值得提及的是，绝大多数采用此方法的参赛队都没有考虑 p，q 在公交线路上的次序，而直接将 $L_p^{(0)}\cap L_q^{(0)}$ 作为 p，q 直达线路的集合。如果所有的公交线路都是双行线，这是可以的，否则需要考虑站点之间的次序，即考虑公交线路行驶的方向。

如果 $A^{(0)}=\emptyset$，则 p，q 之间没有直达线路，需要考虑一次换乘。令 $S_p^{(1)}=\{s\mid l\in L_p^{(0)},p=s_i\in l,s=s_j\in l,i<j\}$ 为 p 可直达的站点集合，$S_q^{(1)}=\{s\mid l\in L_q^{(0)},s=s_i\in l,q=s_j\in l,i<j\}$ 为可直达 q 的站点集合，$B^{(1)}=S_p^{(1)}\cap S_q^{(1)}$ 为从 p 经一次换乘可到达 q 的转乘站点集合。

如果 $B^{(1)} = \emptyset$，则 p 经一次换乘无法到达 q，继续考虑二次换乘。令 $L_p^{(2)} = \{l \mid s$ 在公交线路 l 上，$s \in S_p^{(1)}\}$，$L_q^{(2)} = \{l \mid s$ 在公交线路 l 上，$s \in S_q^{(1)}\}$，则 $A^{(2)} = \{l \mid l \in L_p^{(2)} \cap L_q^{(2)}, s = s_i \in l, t = s_j \in l, i < j\}$ 为从 p 经二次换乘到达 q 的第二条公交线路集合。若 $A^{(2)} \neq \emptyset$，则从 p 转乘二次公交线路可到达 q；而当 $A^{(2)} = \emptyset$ 时，继续这一过程，可得到转乘 k 次到达 q 的全部线路。

但是，这种描述方式较为复杂，特别是换乘次数超过2次时，因此大多数参赛队都增加了最多换乘2次的约束条件。让我们分析一下集合求交算法的算法复杂性。

过 p 点的公交线路数平均为 $\#L_p^{(0)} = \Delta_l$ 条，过 q 点的公交线路数平均也有 $\#L_q^{(0)} = \Delta_l$ 条，因此求出直达线路集合 $A^{(0)}$ 的计算量为 $O(\Delta_l^2)$。

对一次换乘 $B^{(1)}$，从 p 出发可直达的站点数平均为 $\#S_p^{(1)} = \Delta_l\Delta_s$，可直达 q 的站点数平均也是 $\#S_q^{(1)} = \Delta_l\Delta_s$，故求出一次换乘 $B^{(1)}$ 的计算量为 $O((\Delta_l\Delta_s)^2)$。

对两次换乘 $A^{(2)}$，$\#L_p^{(2)} = \#S_p^{(1)} \cdot \Delta_l = \Delta_l^2\Delta_s$，$\#L_q^{(2)} = \Delta_l^2\Delta_s$，故求出两次换乘 $A^{(2)}$ 的计算量为 $O((\Delta_l^2\Delta_s)^2)$。

对一般的 k 次换乘，虽然算法描述很复杂，但其算法复杂性容易由上面的推导递推给出，为 $O((\Delta_l^{[\frac{k}{2}]+1}\Delta_s^{[\frac{k+1}{2}]})^2)$。

3 搜索算法

上一节我们给出了集合求交的搜索算法，方法是从起点 p 和终点 q 分别开始搜索，寻找公共的线路或站点。我们也可以从起点 p (或终点 q) 一端开始进行搜索，直到搜索到终点 q (或起点 p) 为止。这实际上就是直接搜索算法。具体算法为(不妨设从起点 p 出发开始搜索)：

记 $L(s) = \{l \mid$ 站点 s 在线路 l 上$\}$ 表示经过站点 s 的所有公交线路组成的集合，$S(l) = \{s \mid$ 站点 s 在线路 l 上$\}$表示公交线路 l 上所有站点组成的集合。

令 $L^{(0)} = L(p)$，$S^{(0)} = \{s \mid s \in S(l), l \in L^{(0)}\}$。$S^{(0)}$ 表示与 p 在同一条线路上的站点集合。为描述站点之间的先后次序，引入集合 $D(s) = \{t \mid s = s_i \in l, t = s_j \in l, l \in L(s)$，且 $i < j\}$ 表示从 s 可以直达的站点集合。由此定义，令 $D^{(0)} = D(p)$，则当 $q \in D^{(0)}$ 时，从 p 出发无需经过换乘即可直达终点 q。

若 $q \notin D^{(0)}$，则从 p 出发不能直达 q，需考虑一次换乘。令 $L^{(1)} = \{l \mid l \in L(s), s \in D^{(0)}\}$，$S^{(1)} = \{s \mid s \in S(l), l \in L^{(1)}\}$，$D^{(1)} = \{s \mid s \in D(t), t \in D^{(0)}\}$。若 $q \in D^{(1)}$，则从 p 经一次换乘可到达 q。

一般地，令 $L^{(k)} = \{l \mid l \in L(s), s \in D^{(k-1)}\}$，$S^{(k)} = \{s \mid s \in S(l), l \in L^{(k)}\}$，$D^{(k)} = \{s \mid s \in D(t), t \in D^{(k-1)}\}$。当 $q \notin D^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, k-1)$，而 $q \in D^{(k)}$ 时，从 p 出发需经 k 次换乘才能到达终点 q。

类似于上一节的分析可以得到 k 次换乘时直接搜索算法的复杂性为 $O((\Delta_l\Delta_s)^{k+1})$。

直接搜索算法与上一节给出的集合求交搜索算法本质上是一致的，当换乘次数较少时，这是多项式算法。但当 k 稍大一些，计算量将以指数形式增长。特别地，要得到全部解，最坏的情况计算量将达到 $O((\Delta_l\Delta_s)^L)$，其中 L 为公交线路总数。

4 搜索算法的图论模型

直接搜索算法可以等价地归结为二分图上修正的最短路问题。

首先由公交线路和公交站点构造一个二分图 $G = (V, E)$，其中 $V = S \cup L$ 为顶点集合，$S = \{s_1, s_2, \cdots\}$ 为所有公交站点组成的集合，$L = \{l_1, l_2, \cdots\}$ 为所有公交线路组成的集合，$E = \{e_1, e_2, \cdots\}$ 为边集，当且仅当公交站点 s 在公交线路 l 上时，s 与 l 之间有一条边。

这样 S 与 L 构成了二分图的两类顶点，$s \in S$ 的邻集是该站点可以乘坐的所有公交线路组成的集合，$l \in L$ 的邻集是在同一条公交线路上的所有站点组成的集合。

容易看到，站点 p 与 q 的邻集有交，当且仅当在二分图 G 中存在从点 p 到 q 的长度(即边数) 为 2 的路。由于 G 为二分图，与 p 和 q 相邻的顶点为 $l \in L$，这表明存在某条线路 l 同时经过 p 和 q。但是从 p 到 q 的路线必须满足一定的次序，即在线路 l 上，p 在前，q 在后。为此，必须在二分图 G 的边上增加一个标记 λ。

设边 $e = (s, l)$，s 是线路 l 上第 k 个站点，则相应的标记 $\lambda = k$。这样，从 p 无需换乘可直达 q 的充分必要条件是，存在从 p 到 q 的长度为 2 的路 $Q = pe_{j_1}le_{j_2}q$，且 $\lambda_{j_1} < \lambda_{j_2}$，其中 l 为直达公交线路，$\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}$ 为乘车站数。

类似地，从 p 至少需要经过一次换乘才能到达 q 的充分必要条件是，存在从 p 到 q 的最短长度为 4 的路 $Q = pe_{j_1}l_{k_1}e_{j_2}se_{j_3}l_{k_2}e_{j_4}q$，且 $\lambda_{j_1} < \lambda_{j_2}$，$\lambda_{j_3} < \lambda_{j_4}$，其中 l_{k_1}，l_{k_2} 为乘坐的两辆公交车，$\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}$ 和 $\lambda_{j_4} - \lambda_{j_3}$ 分别为两条线路上乘坐的站数，s 为换乘站点。

以此类推，如果从 p 到 q 的最短路长度为 $2m$，记为 $Q = pe_{j_1}l_{k_1}e_{j_2}s_{i_1}e_{j_3}l_{k_2}e_{j_4}s_{i_2}\cdots s_{i_{m-1}}e_{j_{2m-1}}l_{k_m}e_{j_{2m}}q$，且 $\lambda_{j_{2t-1}} < \lambda_{j_{2t}}$ $(t = 1, 2, \cdots, m)$，则从 p 至少需要经过 $m-1$ 次换乘(即乘坐 m 辆公交车)才能到达 q，所乘坐的 m 条公交线路为 l_{k_t} $(t = 1, 2, \cdots, m)$，乘坐站数为 $\lambda_{j_{2t}} - \lambda_{j_{2t-1}}$ $(t = 1, 2, \cdots, m)$，换乘站点为 s_{i_t} $(t = 1, 2, \cdots, q-1)$。由此，我们将集合求交方法转换成二分图 G 上修正的最短路问题。

由于有标识条件的存在，通常所用的最短路算法，如 Dijkstra 算法和 Floyd & Warshall 算法，在此都将失效。为此，我们给出以下修正的最短路算法。

记 $d(v)$ 为从起点 p 到顶点 v 的最短路长度，S_i 为从起点 p 经 i 次转乘所能到达的站点集合，$N(v)$ 为顶点 v 的邻集，T_i 为从起点 p 第 i 次转乘的线路集合。

第1步　置 $d(p) = 0$，对于所有其它点 v，置 $d(v) = \infty$。记 $S_0 = \{p\}$，$i = 0$。

第2步　置 $T_i = \emptyset$。检查所有满足条件 $u \in S_i$，$v \in N(S_i) \subset L$ 的边 $uv \in E$。如果存在这种边 uv，则令 $d(v) = d(u) + 1$，$T_i := T_i \cup \{v\}$，并记 $\lambda(v) = \lambda_{uv}$。

第3步　置 $S_{i+1} = \emptyset$。检查所有满足条件 $v \in T_i$，$u \in N(T_i) \subset S$ 的边 $vu \in E$。如果存在这种边 vu，并且满足 $\lambda_{vu} > \lambda(v)$，则令 $d(u) = d(v) + 1$，$S_{i+1} := S_{i+1} \cup \{u\}$。

第4步　如果 $S_{i+1} = S$，则算法终止。否则令 $L := L \backslash T_i$，$S := S \backslash S_i$，$i := i + 1$，转第2步。

容易看出，算法终止时的指标 i 就是整个公交系统中，从 p 到其余公交站点需要换乘公交线路的最大次数。

5　关于搜索算法的进一步分析

第3节我们指出搜索算法是多项式算法。但当换乘次数较大时，计算量仍然很大。而图论算法与搜索算法是一致的，因此当换乘次数较大时，计算量也很大。

那么，能否减少计算量，使得搜索算法仍然有效呢？事实上，如果某个站点(如站点 s) 已在从 p 出发的某条线路(如线路 l) 上，即 $s \in D^{(0)}$，那么在 $D^{(1)}$ 中如果再次出现站点 s 时，这个站点就不需要再考虑了。同样地，如果 $s \in \bigcup_{i=0}^{k} D^{(i)}$，那么在 $D^{(k+1)}$ 中就无需再考虑这个站点 s 了。

对于公交线路也是如此。若某线路 $l \in \bigcup_{i=1}^{k} L^{(i)}$，则在 $L^{(k+1)}$ 中无需再考虑这条线路 l 了。

相应地，在算法中只要将 $L^{(k)}$ 和 $D^{(k)}$ 修改为 $\widetilde{L}^{(k)} = L^{(k)} \backslash \bigcup_{i=0}^{k-1} L^{(i)}, \widetilde{D}^{(k)} = D^{(k)} \backslash \bigcup_{i=0}^{k-1} D^{(i)}$ 就可以了。搜索时，采用广度优先的搜索方法。在编制程序时，只要设置两个数组，分别记录各站点和线路的处理情况。初始都为 -1，当某条线路出现在 $L^{(k)}$ 时，相应的线路数组元素赋

值为 k；当某个站点出现在 $D^{(k)}$ 时，相应的站点数组元素也赋值为 k。在同一层搜索时，如果发现某条线路在数组中的值为 j $(0 \le j < k)$，则此条线路不予考虑；同样地，如果发现某个站点在数组中的值为 j $(0 \le j < k)$，则此站点也不予考虑。这样，在搜索算法中，总的搜索量仅为 $O(NL)$，其中 N 为站点总数，L 为线路总数。计算量是非常小的。

同样地，在图论模型中，我们已经考虑了这种处理，即在第4步中，$L := L \backslash T_i$ 就是在线路集合 L 中将已经处理过的线路 T_i 去掉，$S := S \backslash S_i$ 就是在站点集合 S 中将已经处理过的站点 S_i 去掉，从而在下一次迭代时，L 和 S 的规模都将缩小，达到减少计算量的目的。

6 其他目标的处理

以上讨论只涉及"转乘次数最少"单个目标。在实际情况中，乘客往往还会考虑"乘车时间最短"及"费用最少"等因素。根据实际情况，我们以换乘次数作为第一优先目标，乘车时间(或费用)作为第二优先目标，费用(或乘车时间)作为第三优先目标进行处理。这样，在图论模型中，乘车时间和费用可作为权系数引入，分别记 w_t 和 w_f。

为明确起见，我们考虑乘车时间为第二目标，费用为第三目标。记 $T_{\min}(v)$ 为从起点 p 到站点 v 的最短乘车时间，$F_{\min}(v)$ 为乘车时间为 $T_{\min}(v)$ 时的最少乘车费用。初始时，对所有的 $v \neq p$ 置 $T_{\min}(v) = \infty$，$F_{\min}(v) = \infty$。在搜索过程中，在同一级搜索中，对可达的站点分别计算相应的乘车时间 $T(v)$ 和费用 $F(v)$，如果 $T(v) < T_{\min}(v)$ 或者 $T(v) = T_{\min}(v)$ 且 $F(v) < F_{\min}(v)$，则用新线路替代原线路，并令 $T_{\min}(v) := T(v)$，$F_{\min}(v) := F(v)$。整个搜索过程无需作大的改动即可达到目的，算法复杂性仍是 $O(NL)$。

在第2节中，我们指出考虑公交线路行驶方向是必要的，因此在图论模型中引入了标记 λ，用来记录站点在线路上的位置信息。正是因为 λ 的存在，使得常用的最短路算法失效，从而导致计算量的增加。如果公交线路均为双行线，那么 λ 就不必引入了。这样，搜索算法就与一个标准的二分图的最短路问题等价，从而可以使用诸如 Dijkstra 算法或 Floyd & Warshall 算法等经典方法进行搜索计算。这是一个多项式算法，且算法复杂性不随换乘次数的增加而增加。

参考文献：

[1] Lawler E. Combinatorial Optimization: Network and Matroids[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976

[2] Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity[M]. Prentic-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1982

[3] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: MacMillan Press, 1976

Models for the Public Transportation Line Selection

CAI Zhi-jie[1], DING Song-kang[2]

(1- School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433;
2- Department of Foundation Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)

Abstract: In this paper, we discuss models for the public transportation line selection and introduce set intersection algorithm and corresponding searching method. We also give a graph theory model, and discuss the complexities of algorithm of these models.

Keywords: set intersection algorithm; searching method; graph theory model; complexity of algorithm

第24卷 增刊2
2007年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0121-10

手机“套餐”优惠几何

邱 华, 宋杰远, 马延峰
指导教师: 丁 梅, 李 丽, 李晓晓, 董海燕
(山东电力高等专科学校，济南 250002)

摘 要: 本文应用线性规划和空间解析几何的方法，结合图形具体的给出了北京和上海的两种“套餐”方案的资费计算方法以及所适用的客户群。通过“边际分析法”、“消费者剩余理论”以及“纳什–伯特兰均衡”模型给出了各种“套餐”方案的评价准则和方法。运用对比分析的方法，指出“被叫全免计划”中隐藏的玄机。最后结合实际情况，给出了设计手机资费方案应该考虑到的价格、产品、促销等因素和原则，先将各“套餐”项转化为优惠率，然后通过求解规划问题的方法设计了一个合理的手机“套餐”资费方案。

关键词: 手机套餐; 优惠; 线性规划; 边际分析

分类号: AMS(2000) 65K03 中图分类号: O221 文献标识码: A

1 问题的提出

手机“套餐”的花样琳琅满目，消费者无所适从，同时运营商们有时也并不知道哪些套餐真正符合客户的需求，哪些套餐真正能给运营商自身带来收益。我们参照中国移动公司现行的资费标准和北京的全球通“畅听99套餐”、上海的“全球通68套餐”方案，需要分析说明以下四个问题：

1) 这两种“套餐”方案的资费计算方法，针对不同通话量需求的用户，说明各种“套餐”方案所适用的用户群；

2) 提出对各种资费方案的评价准则和方法，并对北京、上海推出的“套餐”方案与现行的资费标准作分析、比较并给出评价；

3) 评价“被叫全免费计划”方案；

4) 给出设计全球通手机的资费方案的考虑因素，并设计一个“套餐”方案。

2 模型的假设

1) 用户的通话量可以通过以往的经验和统计得到；
2) 用户超出和不超出免费通话时间的概率均为 1/2；用户拨打和接听电话的概率均为 1/2[1]；
3) 假定消费者理性地选择定价较低的套餐；
4) 在评价和计算过程中，消费者不发生品牌转换行为；
5) 企业在给出套餐定价时没有相互沟通，独立定价。

3 问题的分析与解决

1. “套餐”适用群组

1) 北京全球通“畅听99套餐”：

先考虑单因素，再综合考虑复合因素分析。

① 假设用户的数据业务流量不超出，只考虑用户每月本地通话量[2]。

设 x 表示每月的通话时间（单位：分钟），y 表示手机话费（单位：元），非套餐的现行资费的函数关系式为 $y = 50 + 0.4x$；

四种套餐的函数关系式为

$$y_1 = \begin{cases} 99, & x \le 280, \\ 99 + 0.35(x - 280), & x > 280, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 139, & x \le 560, \\ 139 + 0.25(x - 560), & x > 560, \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 199, & x \le 1000, \\ 199 + 0.2(x - 1000), & x > 1000, \end{cases} \qquad y_4 = \begin{cases} 299, & x \le 2000, \\ 299 + 0.15(x - 2000), & x > 2000. \end{cases}$$

在同一坐标系中根据函数图象，得图象交点的横坐标为 $x_1 = 122.5$，$x_2 = 394.3$，$x_3 = 800$，$x_4 = 1500$。得到结果：每月本地历史通话时间在 $0 < x \le 122.5$ 的用户，不选套餐实惠；$122.5 < x \le 394.3$、$394.3 < x \le 800$、$800 < x \le 1500$、$x > 1500$ 的用户分别选99、139、199、299套餐实惠。

以上分析对于本地通话比例较大，而其他业务较少的用户可以按照此标准选择适合自己的“畅听99套餐”种类。

② 假设客户数据业务流量不超出，并且只有长途通话量，用相似方法可得结论：$0 < x \le 70$ 用户不选套餐实惠；$70 < x \le 431.1$、$431.1 < x \le 857.14$、$857.14 < x \le 1666.67$、$x > 1666.67$ 的用户分别选99、139、199、299套餐实惠。长途业务比较多的全球通用户可以按此选择“畅听99套餐”的方案。

③ 假设客户数据业务流量不超出，综合考虑本地通话和长途通话量（单位：元/分钟），设本地通话时间为 t_1（单位：分钟），长途通话时间为 t_2（单位：分钟），Y 为用户每月的通话费用（单位：元/分钟），则非套餐的正常收费的函数的关系式为 $Y = 50 + 0.4t_1 + 0.7t_2$；

四种套餐的函数关系式分别为

$$Y_1 = \begin{cases} 99 + 0.1t_2, & t_1 < 140, \quad t_2 < 140, \\ 99 + 0.35(t_1 - 140) + 0.1t_2, & t_1 > 140, \quad t_2 < 140, \\ 113 + 0.45(t_2 - 140), & t_1 < 140, \quad t_2 > 140, \\ 113 + 0.35(t_1 - 140) + 0.45(t_2 - 140), & t_1 > 140, \quad t_2 > 140, \end{cases}$$

$$Y_2 = \begin{cases} 139 + 0.1t_2, & t_1 > 280, \quad t_2 < 280, \\ 139 + 0.25(t_1 - 280) + 0.1t_2, & t_1 > 280, \quad t_2 < 280, \\ 167 + 0.35(t_2 - 280), & t_1 < 280, \quad t_2 > 280, \\ 167 + 0.25(t_1 - 280) + 0.35(t_2 - 280), & t_1 > 280, \quad t_2 > 280, \end{cases}$$

$$Y_3=\begin{cases}199+0.1t_2, & t_1<500,\quad t_2<500,\\ 199+0.2(t_1-500)+0.1t_2, & t_1>500,\quad t_2<500,\\ 149+0.3(t_2-500), & t_1<500,\quad t_2>500,\\ 149+0.2(t_1-500)+0.3(t_2-500), & t_1>500,\quad t_2>500,\end{cases}$$

$$Y_4=\begin{cases}299+0.1t_2, & t_1<1000,\quad t_2<1000,\\ 299+0.15(t_1-1000)+0.1t_2, & t_1>1000,\quad t_2<1000,\\ 399+0.25(t_2-1000), & t_1<1000,\quad t_2>1000,\\ 399+0.15(t_1-1000)+0.25(t_2-1000), & t_1>1000,\quad t_2>1000.\end{cases}$$

如果 $y=Y_1$，则

$$\begin{cases}0.4t_1+0.6t_2=49, & t_1<140,\quad t_2<140,\\ 0.05t_1+0.6t_2=0, & t_1>140,\quad t_2<140,\\ 0.4t_1+0.3t_2=0, & t_1<140,\quad t_2>140,\\ 49+0.05t_1+0.25t_2=0, & t_1>140,\quad t_1>140,\end{cases}$$

表示现行资费与套餐1的基本包月费相等时，用于本地通话的时间 t_1 和长途通话时间 t_2 之间的关系。

令 $y\geq Y_1$ 得到

$$\begin{cases}49\geq 0.4t_1+0.6t_2, & t_1<140,\quad t_2<140,\\ 0\geq 0.05t_1+0.6t_2, & t_1>140,\quad t_2<140,\\ 0\geq 0.4t_1+0.3t_2, & t_1<140,\quad t_2>140,\\ 0\geq 49+0.05t_1+0.25t_2, & t_1>140,\quad t_2>140,\end{cases}$$

说明当用户本地通话时间 t_1 与长途通话时间 t_2 满足 $49\geq 0.4t_1+0.6t_2$ 时，不订制“套餐”合适，而其他情况则订制“套餐”合适。其余三种套餐结论类似可得[3]。

我们利用统计用户历史通话量来分析的“套餐”的资费计算方法。用户确实可以通过以往的经验来选择适合自己的套餐，而运营商则必需对用户消费历史 ARPU 进行精确分析，才能确保在用户获得优惠的同时，得到业务收入的净增。

2. 资费的估算与套餐的优劣

1) “边际分析法”评价资费

随着电信市场的日益成熟和竞争的愈加充分，电信运营企业摒弃单纯的价格竞争，利用价格歧视理论进行差异化定价。价格歧视是指企业在出售完全一样的或经过差异化的同类产品时，对不同的顾客索取不同的价格。

只要已知厂商的收益函数和成本函数，就能够求得厂商利润最大的解。衡量完全竞争厂商的短期均衡的方法为边际分析法。

假设消费者都是理性的，为达到效用的最大化，恰好消费完月基本费中包括的全部免费的通话时间，并不消费超出基本费以外的业务。

① 北京移动公司的全球通“畅听99套餐”

由获得280、560、1000以及2000分钟的免费通话时间，需每月支付99元、139元、199元以及299元，可得到各个套餐的每分钟通话费依次可近似为0.35元、0.25元、0.2元以及0.15元。则每分钟通话费与月基本费之间的关系呈线性关系或近似线性关系的变化趋势，显然随着购买量的增大，每分钟通话费是减少的，公司的收益呈上升趋势。由统计资料可知，移动公司所需花费的成本大概应为收益的77%。

因此套餐的定价模式如下图所示：

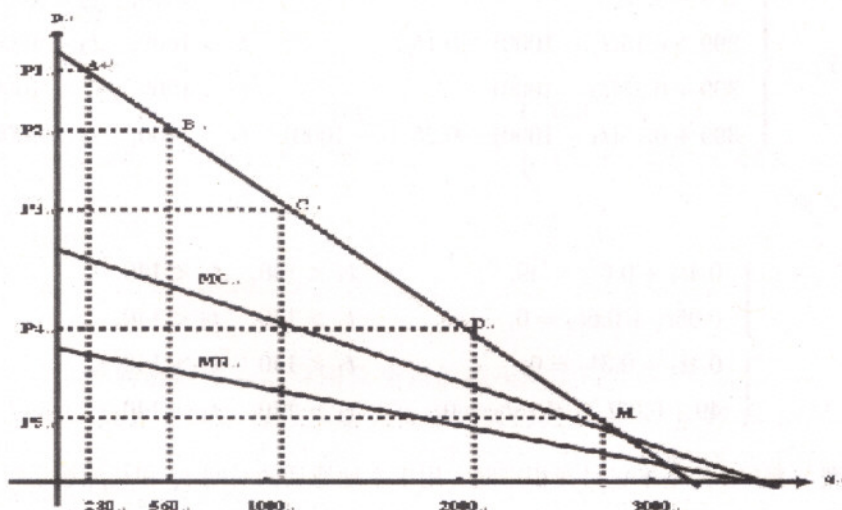


图1: 手机套餐定价的消费者剩余关系图

购买各种套餐，其支付的价格水平分别为 p_1，p_2，p_3，p_4；MC 为边际成本曲线，MR 为边际收益曲线；点 M 代表在单一价格水平下，满足充要条件 $MR=MC$ 时，给厂商带来收益最大化的点。

对此模式进行分析，首先引入“消费者剩余”概念，指的是消费者对一定量的商品或服务最多愿意支付的价钱与实际支付的价钱之差。尽可能获得更多的乃至全部的消费者剩余是厂商增加收入、提高利润的重要途径。根据边际效用递减规律，随着消费者购买商品数量的递增，所带来的边际效用呈递减趋势。这时，通过更低的价格可以进一步引导需求。当这较低的价格高于边际成本，而且又不影响较高价格的需求，厂商可以出售更多的商品，获取更多的利润。二级价格歧视模式下，消费者剩余为面积。在本“套餐”中，$h_1=s_{\Delta PP5M_0}$，$h_0=s_{\Delta PP1A}+s_{\Delta AP2B}+s_{\Delta BP3C}+s_{\Delta CP4D}$。显然，$h_1\gg h_0$，这说明实施二级价格歧视是有效的，能够给移动公司带来更多的消费者剩余[4]。

② 上海移动公司“全球通68套餐”方案

随着购买量的增加，移动公司的收益是呈下降趋势的，但是运用“消费者剩余”理论分析得出，与“畅听99套餐”相同，这种套餐同样能给移动公司带来巨大的消费者剩余。

综上所述，由边际分析法及消费者剩余价值理论对这两个套餐进行分析得到，在运用二级价格歧视策略的过程中，对于消费者而言，随着购买量的增加，每分钟所用的通话费有所减少，从而对消费者有一定的优惠，但对于移动公司而言，每分钟通话费的减少并没有影响它的巨额收益。

2) 北京移动公司全球通“畅听99套餐”与现行资费相比的优惠分析如表1所示：

表1: “畅听99套餐”的优惠率

月基本费(元)	99	139	199	299
套餐包含主叫分钟	280	560	1000	2000
现行主叫分钟	247.5	347.5	497.5	747.5
优惠率1	0.116	0.379	0.503	0.626
超出套餐本地主叫资费（元/分钟）	0.35	0.25	0.2	0.15
现行本地主叫资费（元/分钟）	0.4	0.4	0.4	0.4
优惠率2	0.125	0.375	0.500	0.625
现行长途资费（元/分钟）	0.7	0.7	0.7	0.7
超出套餐本地主叫长途资费	0.45	0.35	0.3	0.25
优惠率3	0.357	0.500	0.571	0.643

套餐中本地被叫资费（元/分钟）	现行本地被叫资费（元/分钟）	优惠率4
0	0.4	1
现行长途资费（元/分钟）	套餐长途资费	优惠率5
0.7	0.1	0.857

3)　“纳什-伯特兰均衡”模型估算成本[5]

客户在不同的“套餐”之间转换会给运营商和客户两方带来一系列的转换成本支出，因此即使竞争者产品的价格一降再降，客户依然能够保证对原有品牌的重复购买，这种现象我们将其称之为“顾客锁定”。拥有顾客锁定能力的企业可以获得超出边际成本以上的超额利润，因为新推出的套餐往往出现某种程度的表面费用降低或优惠。由于影响转换成本的主要因素是不可观测的（如客户搜寻替代套餐时精神与体力的支出；与原有套餐解除关系时情绪上的感知等），这些只能被看作人们情感上的效用损失，不能用具体的数据来精确计量。

然而利用“纳什-伯特兰均衡”模型构造转换成本估算函数，可以把不可观测的变量与可以观测的市场价格和市场份额变量联系起来，把转换成本作为市场价格和市场份额的函数，解决转换成本的计量问题。

①　纳什-伯特兰均衡模型

移动市场上有两种套餐，它们之间的转换成本为零，并且可以相互替代，假定消费者理性地会选择定价较低的套餐，如果两种套餐定价相同那么就不会发生消费者品牌转换行为，每种套餐各自固守原有的市场份额，假定每种套餐各分得市场总需求的一半。

设总需求函数 $q = Q(p)$，每种套餐面临的需求函数

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} Q(p_i), & p < p_j, \\ \frac{1}{2}Q(p_i), & p_i = p_j, \\ 0, & p_i > p_j, \end{cases}$$

对成本的假设：套餐固定成本为 c_1，边际成本为常量 c_2。因此博弈的支出函数

$$U_i(p_i, p_j) = p_i q_i(p_i, p_j) - c_2 q_i(p_i, p_j) - c_1 = (p_i - c_2) q_i(p_i, p_j) - c_1,$$

两种套餐同时选择他们的价格，假设不做沟通，可以观测到另一套餐的定价，只是在自己定价时预期对手机的定价。如果 (p_i^*, p_j^*) 是该博弈的一个纳什均衡解，那么对任意 i，必然

有：$U_i(p_i^*,p_i^*) > U_i(p_i,p_j)$。对它的计算实际上就是对每位参与者 i，p^*，是下面的解

$$\max U_i = (p_i - c_2)q_i(p_i,p_j) - c_1,$$

该函数的均衡解为：$p_i^* = p_j^* = c$；$U_i^* = U_j^* = 0$。

这意味着在双套餐市场上，两个博弈者是以边际成本定价的，双方利润都为零。在现实中这种情况几乎不可能发生。

② 客户转换成本估算模型

由于套餐差异化的存在，使得套餐之间并不是可以完全替代的，客户在不同套餐之间转换品牌时必然要承担相应的成本支出。

假设移动只有两种套餐 A 和 B，客户在两种套餐之间的分布情况为：原先有数量为 Q_A 的客户购买了 A 套餐，数量为 Q_B 的客户购买了 B 套餐，两种套餐定价为 P_A 和 P_B，转换成本都是 $T > 0$；U_A 表示客户购买 A 套餐得到的效用，U_B 表示客户购买 B 套餐得到的效用。由上，每位客户在下次购买时的效用函数为

$$U_A = \begin{cases} -P_A, & \text{顾客重复购买套餐 } A, \\ -P_B - T, & \text{顾客转向购买套餐 } B, \end{cases}$$

$$U_B = \begin{cases} -P_A - T, & \text{顾客重复购买套餐 } A, \\ -P_B, & \text{顾客转向购买套餐 } B. \end{cases}$$

令 $\overline{Q}_A$ 表示下一次购买时选择套餐 A 的客户数量；$\overline{Q}_B$ 表示下一次购买时选择产品 B 的客户数量，可以得到

$$\overline{Q}_A = \begin{cases} 0, & P_A > P_B + T, \\ Q_A, & P_B - T \le P_A \le P_B + T, \\ Q_A + Q_B, & P_A < P_B - T, \end{cases}$$

$$\overline{Q}_B = \begin{cases} 0, & P_B > P_A + Y, \\ Q_B, & P_A - T \le P_B \le P_A + T, \\ Q_A + Q_B, & P_B < P_A - T. \end{cases}$$

假设套餐的固定成本和变动成本 C_{1A}、C_{1B} 和 C_{3A}、C_{3B}，因此每个套餐的利润由下式确定

$$R_A(P_A,P_B) = P_A\overline{Q}_A - C_{1A} - C_{3A}, \qquad R_B(P_A,P_B) = P_B\overline{Q}_B - C_{1B} - C_{3B}.$$

该模型的纳什均衡解不存在，因为对 A 套餐来说 $P_A = P_B + T$ 是保证客户不会被对方挖走的前提下的最优价格选择。相似地，$P_B = P_A + T$ 是 B 套餐保证客户不会被挖走的前提下的最优价格，两个方程要同时成立，只有 $P_B = P_A$。

由于在该博弈中满足“纳什-伯特兰均衡”模型的一个重要属性，即双方在制定价格时不仅要考虑利润最大化，同时还要防备对方降低价格挖取自己的客户，利用这种属性可以估算双寡头博弈中的转换成本。

假如套餐 A 把价格设定为 $P_A < P_B - T$，那么它就可以挖取套餐 B 的所有客户，反之亦然。当套餐 A 挖取了套餐 B 的所有客户，所有客户都成为了 A 品牌的消费者，$\overline{Q}_A = Q_A + Q_B$，$\overline{Q}_B = 0$。

对于满足这条属性的一组均衡价格 $(\widetilde{P}_A, \widetilde{P}_B)$ 我们有下面的结论：

对于给定的 $\widetilde{P}_B$ 和 $\widetilde{Q}_B$，A 套餐制定的最高价 $\widetilde{P}_A$ 必须满足

$$\widetilde{R}_B = \widetilde{P}_B\widetilde{Q}_B \geq (\widetilde{P}_A - T)(Q_A + Q_B).$$

对于给定的 $\widetilde{P}_A$ 和 $\widetilde{Q}_A$，B 套餐制定的最高价 $\widetilde{P}_B$ 必须满足

$$\widetilde{R}_A = \widetilde{P}_A\widetilde{Q}_A \geq (\widetilde{P}_B - T)(Q_A + Q_B).$$

A 套餐制定的最高价要满足这样的约束：B 套餐靠降低价格攫取 A 套餐的客户来增加利润是不现实的，从而 B 套餐会继续安于现状，不会对 A 套餐的定价行为作出反应，反之亦然。

当不等式取等号时，$\widetilde{Q}_A = Q_A$ 而 $\widetilde{Q}_B = Q_B$，因此可以唯一确定一组均衡价格

$$\widetilde{P}_A = \frac{(Q_A + Q_B)(Q_A + 2Q_B)T}{(Q_A)^2 + Q_AQ_B + (Q_B)^2}, \qquad \widetilde{P}_B = \frac{(Q_A + Q_B)(2Q_A + Q_B)}{(Q_A)^2 + Q_AQ_B + (Q_B)^2}.$$

实际上每种套餐的转换成本一般并不相同，可以假设 T_A 和 T_B 分别为购买 A 和 B 的转换成本，两个不等式又可以表达为

$$\widetilde{R}_A = \widetilde{P}_A\widetilde{Q}_A - C_{1A} - C_{3A} \geq (\widetilde{P}_B - T_B)(Q_A + Q_B),$$
$$\widetilde{R}_B = \widetilde{P}_B\widetilde{Q}_B - C_{1B} - C_{3B} \geq (\widetilde{P}_A - T_A)(Q_A + Q_B),$$

取等号时，可得

$$T_A = \widetilde{P}_A - \frac{\widetilde{P}_B\widetilde{Q}_B - C_{1B} - C_{3B}}{Q_A + Q_B}, \qquad T_B = \widetilde{P}_B - \frac{\widetilde{P}_A\widetilde{Q}_A - C_{1A} - C_{3A}}{Q_A + Q_B}.$$

3. “全免”就优惠吗？

北京移动公司2007年5月23日推出的全球通“被叫全免费计划”方案。此方案规定月租50元，本地被叫免费，其他项目资费均同现行的资费标准，另外要求用户至少在网一年。

“被叫全免费计划”的特点：

① 单向收费的改革之路。按照此计划，每月的基本费为50元，本地接听电话已经全部免费，接听时间没有时间限制，仅计算打电话的费用。使北京全球通客户迎来真正意义彻底的单向收费服务，不附加任何套餐。由于不需要选择套餐，不需要仔细计算资费，简单清晰，一目了然，非常方便客户理解、记忆。此计划相比以前的套餐，最大的不同就是没有套餐的门槛让“单向收费”成为现实。尤其对于以本地通话为主的客户，优惠可达到一半左右，受益确实匪浅。为“单向收费”成为可能铺设了一条希望之路，让客户看到了“单向收费”的希望。

② 一定意义下的“双方共赢”。对移动公司来讲，“单向收费”可以增加客户群，提高一定的业务量。

③ 限制低端客户。“被叫全免计划”照样收取50元月租费，对于手机使用不多的低端用户每月话费总额不超过50元，而50元的月租费，无形之中形成了门槛。

④ 对“畅听99套餐”客户意义不大。

4. “套餐”设计

1) 考虑价格因素

无论是对顾客还是对移动公司价格是最直接因素。全球通用户的范围很广，用户的历史最久，数量最多也最稳定，号码、套餐等更换频率较低，对资费也不太在意。全球通用户多为白

领商务人士，用于公事的话费比例较大。他们的价格敏感度最低而对网络品质的要求最高，而全球通的高品质的网络特点正满足他们的需求，所以在制定资费时价格弹性最小，可以制定分级明显的套餐。

另外，运营商考虑为了获取最大利润都尽可能的把价格定的高，但是又要服从约束。套餐定价的最高限要不至于让竞争者发现价格稍许降低就可以大量挖取另一套餐的顾客从而获利。设计的资费要能够保证顾客不流失，同时又可以使利润最大化。

2) 客户的个性化需求

很多全球通用户，经常在外地工作，长途及漫游费比例较大，他们希望能在几个特定地区（如出差频率较高的某些区域内）给予漫游优惠。

3) 产品因素

产品主要是指资费套餐内部各要素之间组合的合理化和清晰化，即套餐能让客户理解各项服务所占的额度及优惠程度。

4) 考虑促销因素

全球通用户由于其自身的特点注重的是套餐能够满足自己的需求，而不是价格。他们需要的是优质及时的服务，所以在设计方案时，可以选择一些特殊服务项目，比如（移动公司推出的手机报及天气预报等项目）这些都可选择包月付费等方式。

我们在设计时，还应该考虑到设计的三大基本原则："双方共赢"的原则，"有效区隔"的原则和"品牌优化"的原则。

我们在套餐中增加了一项低端客户项即69元项如表2所示。假设客户拨打和接听电话的概率均为 1/2，并且超出包月及不超出包月通话时间的概率也为 1/2，先构造优惠费率限制

表2: 新设计套餐的优惠率

月基本费	包含本地主叫的优惠率	超出套餐部分本地主叫资费的优惠率	本地被叫资费优惠率	数据业务优惠率	长途资费优惠率
69	0.0394058	0.2576538	0.1623190	0.2146059	0.156892
99	0.003789027	0.003789027	0.1500454	0.310397	0.1273113
139	0.1500454	0.0105061	0.1623190	0.2146059	0.156892
199	0.310397	0.0101091	0.080469	0.414079	0.1213101
299	0.1273113	0.0163484	0.0782108	0.2678524	0.1569448

得数学规划问题[6]，其中 x_{ij} 表示各优惠率。

$$f = \max\left(69\sum_{j=1}^{5}x_{1j} + 99\sum_{j=1}^{5}x_{2j} + 139\sum_{j=1}^{5}x_{3j} + 199\sum_{j=1}^{5}x_{4j} + 299\sum_{j=1}^{5}x_{5j}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\le 0.6506962,\\
& x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\le 0.5629947,\\
& x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\le 0.6885561,\\
& x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\le 0.571292,
\end{aligned}$$

$$x_{21} \le 0.0433463, \quad x_{31} \le 0.2834191, \quad x_{41} \le 0.1788111, \quad x_{51} \le 0.4456934,$$

$$x_{11} \le 0.0394058, \quad x_{12} \le 0.2576538, \quad x_{14} \le 0.2146059, \quad x_{15} \le 0.156892.$$

计算结果为

$$x_{11} = 0.11, \quad x_{21} = 0.16, \quad x_{31} = 0.3794642, \quad x_{41} = 0.5025, \quad x_{51} = 0.62625,$$

$$x_{12} = 0.01, \quad x_{22} = 005, \quad x_{32} = 0.1, \quad x_{42} = 0.12, \quad x_{52} = 0.15, \quad x_{3j} = 0, \quad j = 1, \cdots, 5,$$

$$x_{42} = 0.5573655, \quad x_{4j} = 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, \quad x_{51} = 0, \quad x_{53} = 0.5260651,$$

$$x_{54} = 0.4975, \quad x_{55} = 0.37375.$$

对于高、中、低端用户我们设计的套餐都有不同长度的免费本地通话时间，而且优惠幅度是与定制套餐金额成正比的。这种结果是符合套餐设计中对于低端用户选择"低门槛进入策略"的，而且低端用户一般可以接受69元的套餐定制，但比起中高端用户来讲所得的优惠比较少，属于相对的以高通话方式进入。而对于高端用户，则得到的优惠相对中低端用户较高。从而在一定程度上可以培养高端用户的在网忠诚度。中高端用户的长途资费都有不同程度的优惠，符合了全球通用户的消费心理。能够更好的吸收中高端用户，提高用户的满意度。

我们的计算结果仍有不足，比如没有体现出对于被叫接听以及数据业务方面的优惠。但由于经常在外地工作，因此希望能在几个特定地区给予漫游优惠；也有一些全球通用户认为不同套餐间某些要素应该兼容，比如漫游和短信包月的组合打折。

而对于运营商来讲也要有一定程度的盈利，但是移动通信领域的竞争较为激烈，用户转网也比较方便，因此在制定移动通信资费方面应更多关注如何降低离网率，从而降低运营成本。而争取一个新用户所消耗的成本是保持一个现有用户的5倍，如果用户的流失率降低5%；其利润就能增长25%～80%。因此用户的"忠诚"就是企业的效益，从而提高高端用户的忠诚度是相当重要的。所以我们在保证运营商不会蒙受损失的情况下，应该给用户最大程度的优惠。由此可以给出以下标准如表3所示：

表3: 新设计套餐

月基本费（元/月）	包含本地主叫分钟数	超出套餐部分本地主叫资费（元/分钟）	本地被叫资费（元/分钟）	包含数据业务 GPRS 流量	17951国内 IP 长途资费（分钟）	
					忙时	闲时
69	190	0.4	0	10M	0.2	0.1
99	290	0.35	0	10.39753M	0.1	0
139	550	0.3	0	20M	0.1	0
199	1000	0.25	0	50M	0.1	0
299	2000	0.2	0	50M	0.1	0

参考文献：

[1] 吴赣昌. 概率论与数理统计[M]. 中国人民大学出版社，2007

[2] 刘满凤，傅波，聂高辉. 运筹学模型与方法教程例题分析与题解[M]. 清华大学出版社，2001

第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0131-07

手机套餐评价模型

刘启明， 吴森森， 廖珍珍
指导教师： 吴阔华
(江西理工大学，赣州 341000)

编者按： 本文根据题目的要求，结合北京和上海套餐方案的具体情况，首先详细地给出了手机资费的计算公式；然后建立了方案的评价标准，对各方案作了评价分析，并对“被叫全免费计划”方案进行了评价。最后，引入了方案的吸引力指标，建立优化设计模型，求解得到了新的套餐方案。不足之处，关于方案的评价方法有不尽合理之处，吸引力函数的合理性还值得再考虑。

摘　要： 本文主要讨论了手机“套餐”优惠的问题。首先，根据题中已知条件和有关数据间的关系构造了各方案资费的数学模型。同时，运用经济学中生产的“规模效应”的原理，得出北京、上海推出的各“套餐”所适用的消费群。其次，我们根据不同准则和方法对北京、上海推出的“套餐”进行综合评价。对于问题三，我们本着各种方案都有优缺点、有适用的人群的准则对全球通“被叫免费计划”方案进行评价；对于问题四，我们在满足新设计的套餐方案较现有“套餐”方案运营商的收入降低不超过10%的条件下，通过构造吸引力函数，建立优化模型，在此基础上设计了“畅听”升级版套餐，并通过实例论证了该新方案的可行性。最后，文章进一步讨论了模型的优化问题。

关键词： 临界点；非线性规划；偏好程度；用户满意度

分类号： AMS(2000) 90C05　　**中图分类号：** O221.1　　**文献标识码：** A

1　模型的假设

1、套餐使用当月不停机，直至用完整个月，要求在网年限，则在网年限内不停机。

2、按月计算资费，若有优费时段的资费安排，则取其平均值。

3、拨打中国移动 IP，只考虑拨打国内长途，不考虑拨打港澳台和国际长途电话。

4、问题二在制定标准和方法时涉及到的有关的主叫或被叫都是指本地主叫或被叫。

2　符号的说明

t_{ij}：第 i 种方案中第 j 项目的通话时间或短信条数及流量 $j=1,2,\cdots,17$

m_{ij}：第 i 种方案中第 j 项目的资费

j 的编号：1未漫游主叫当地；2未漫游直拨国内长途；3未漫游直拨国际长途；4未漫游拨中国移动 IP (国内)；5直拨港澳台；6未漫游被叫；7漫游时主叫漫游当地；8漫游时直拨国内长途；9漫游时直拨国际长途；10漫游时拨中国移动 IP (国内)；11漫游时被叫漫游地当地以外的地区；12漫游时被叫漫游地当地；13所发短信的接收方为中国移动的短信的条数；14所发短信的接收方为中国网通、联通及固定电话的网间电话；15中国大陆地区发送国际大陆以外地区运营客户的短信；16漫游到中国以外的国家和地区后，发送国际短信；17漫游到中国大陆以外的国家和地区后接收的短信。

f_{ij}：第 i 种方案第 j 项目的费用如表示1所示，$j=1,2,\cdots,7$

表1: 各种费用

j 的编号	1	2	3	4	5	6	7
含义	月基本费	主叫费用	被叫费用	漫游费	长途费	短信费	其他

T_{i1}：第 i 种方案套餐赠送的本地主叫分钟数(无套餐该 $T_{i1}=0$)
T_{i2}：第 i 种方案套餐赠送的本地主叫分钟数(无套餐该 $T_{i2}=0$)
F_i：第 i 种方案当月总的资费(元)　　d_i：第 i 种方案套餐赠送的短信(条)

3 模型的建立、分析及求解

(一) 对第一问的求解

1) 资费的计算

本地主叫费用

$$f_{i2}(t_{ij})=\begin{cases}0, & \sum\limits_{j=1}^{5}t_{ij}\le T_{i1},\\ (\sum\limits_{j=1}^{5}t_{ij}-T_{i1})m_{i1}, & \sum\limits_{j=1}^{5}t_{ij}>T_{i1}.\end{cases} \tag{1}$$

本地被叫费用

$$f_{i3}(t_{ij})=\begin{cases}0, & t_{i6}\le T_{i2},\\ (t_{i6}-T_{i2})m_{i2}, & t_{i6}>T_{i2}.\end{cases} \tag{2}$$

当月总的漫游费用=当月总的漫游时间×单位时间漫游的资费，即

$$f_{i4}(t_{ij})=\sum_{j=7}^{12}(t_{ij}m_{ij}). \tag{3}$$

长途费用=国内长途+国际长途+IP国内长途+ 港澳台长途费用，即

$$f_{i5}(t_{ij})=\sum_{j=2}^{5}t_{ij}m_{ij}+\sum_{j=8}^{11}t_{ij}m_{ij}. \tag{4}$$

当月总的短信费用

$$f_{i6}=\begin{cases}\sum\limits_{j=14}^{17}t_{ij}m_{ij}, & t_{i,13}\le d_i,\\ \sum\limits_{j=14}^{17}t_{ij}m_{ij}+(t_{i,13}-d_i)m_{ij}, & t_{i,13}>d_i.\end{cases} \tag{5}$$

由(1)~(5)可知，当月总费用=月基本费+本地主叫费用+本地被叫费用+长途费+漫游费+短信费+其他费用

$$F_i=\sum_{j=2}^{5}f_{ij}(t_{ij})+f_{i1}+f_{i6},\quad i=1,2,3,\cdots,15.$$

【案例】 现在有一位购买“畅听99套餐”99元的客户话单主要信息如表2所示：

表2: “畅听99套餐”的客户话单信息

项目	本地主叫	本地国内长途	本地被叫	IP长途	呼叫转移
计量	213分钟	309个6秒	252分钟	48分钟	1分钟
资费	0.35元/分钟	0.07元/6秒	0元/分钟	0.1元/分钟	0.1元/分钟

利用以上建立的计算资费的公式模型

$$F_i = f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} + f_{i5} + f_{i7} = 99 + 3090.07 + 480.1 + 0.1 = 125.53(\text{元}).$$

2) “套餐”方案适用人群的分析

在本问题中，全球通“畅听99套餐”方案和“全球通68套餐”区别在于基本费用，而其他的几项费用都是中国移动公司现行的价格标准，为了说明各种“套餐”适用于什么样的用户时，可以只计算各种“套餐”的基本费用，其他的费用不予考虑。全球通“畅听99”方案及“全球通68套餐”方案的基本费用

$$\min\left(f_{i1} + f_{i2}(t_{ij})\right)$$

$$f_{i2}(t_{ij}) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{j=1}^{5} t_{ij} \le T_{i1}, \\ (\sum\limits_{j=1}^{5} t_{ij} - T_{i1})m_{i1}, & \sum\limits_{j=1}^{5} t_{ij} > T_{i1}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 15.$$

求解见表3和4。

表3: 全球通“畅听99”最优选择方案

本地主叫时间(分钟)	0~123	123~394	394~800	800~1504	1504以上
最优选择方案	不用套餐	99套餐	139套餐	199套餐	299套餐

表4: “全球通68套餐”最优选择方案

本地主叫时间(分钟)	0~45	45~693	693~1175	1175以上
最优选择方案	不用套餐	68套餐	128套餐	188套餐

(二) 对第二问的求解

我们首先是从六个不同的角度提出了六个评价的标准对题中各个方案进行比较和评价，在此基础上结合不同的消费人群对各个套餐给出了总的评价结果。

1) 标准评价方法

标准一：在本地主叫总的通话量一定的条件下，该月主叫费用 (f_{i10}) 越低，消费者的偏好程度越高。即 $\min f_{i1} + f_{i2}(t_{ij})$，求得当月主叫基本通话最小的方案未全球通68套餐。

标准二：若此套餐短信费用最少，则消费者对该套餐的偏好程度越高。$\min f_{i1} + f_{i6}(t_{ij})$，求出短信费用最小的方案为动感地带和神州行。

标准三：在本地被叫通话量一定的条件下，被叫费用越低，消费者对该方案的偏好程度越高。即 $\min f_{i1}+f_{i3}(t_{ij})$，求得被叫费用最小的方案为全球通68套餐1类和动感地带。

标准四：在拨打国内 IP 时间一定下，国内长途 IP 费用越少，用户对该套餐的偏好程度越高。即 $\min f_{i1}+f_{i5}(t_{ij})$；

标准五：在漫游时间一定的情况下，漫游费用越少，用户对该套餐的偏好程度越高。即 $\min f_{i1}+f_{i4}(t_{ij})$；

标准六：收入越高的消费者对月基本费的关注度越低，反之越高。即 $\min f_{i1}$，求解这四、五、六标准下的最优方案为无套餐动感地带。

由以上的评价的准则和方法，根据文献[1]的思想把消费人群分为以下几类如表5所示：

表5: 消费人群分类

类别	A	B	C	D
人群	商务精英	繁忙白领	在校学生、年轻白领	以接电话为主的人群

综上所述，可以得到如下结论：

① 全球通套餐对月通话量需求较大的用户群更具吸引力；

② 动感地带套餐适用于那些低收入的学生群体或以主要以发短信为主的用户群体；

③ 神州行凭0月租优势对一些中老年低收入用户有吸引力。

(三) 问题三求解

对“被叫全免费计划”案的评价，我们是分别将其同其他方案的资费方程联立，求解得资费相等时时间的临界点，从而得出以下结论(过程略)：

① 被叫全免费计划方案只适用于以接听电话为主的客户，且被叫通话时间越长，该套餐的吸引力越强；

② 对那些以主叫通话量较大的用户群，该套餐不具有竞争优势。

(四) 对第四问的求解

在上海、北京全球通运营都推出被叫免费方案、高端用户群倾向于语音服务即当地市场没有出现具有竞争力的短信套餐的前提下，在设计“套餐”方案时应遵循以下准则：

1) 应优先考虑本地通话资费的高低；

2) 新“套餐”应具有区分不同用户群(如学生、商务精英)的功能；

3) 新套餐应根据客户的消费习惯和实际需求推出多种业务组合的套餐；

题中要求设计一个全球通手机套餐资费方案，由文献[2]，主要考虑如下几个因素：

1) 市场上已有的套餐的方案；2) 各类用户群的比例；3) 主叫的单位时间费用；4) 本地被叫资费；5) 月基本费包含本地主叫分钟数；6) 套餐的组合问题。

1、符号的约定

f：当月主叫基本通话费用 s：用户每月所需的主叫时长(分钟)

k：基本通话费所占月基本费的百分比 $(0\le k\le 1)$

现有的套餐符号：

$\bar{p}_1$：现有套餐最优主叫资费(元/分钟)

p_2：现有套餐最优短信资费(元/条)

$\bar{f}_0$：新套餐的最低月使用费(元)

$\bar{f}_1$：现有套餐的主叫费用

$\bar{f}_2$：现有套餐的短信费用(元)

新套餐的符号：

p_1：新套餐最优的主叫资费(元/分钟)

p_2：新套餐最优的短信资费(元/条)

f_0：新套餐的最低月使用费(元)

s_1：新套餐的主叫时间(分钟)

s_2：新套餐的短信条数(条)

2、模型的建立过程

① 用户满意度确定 s：

根据前面的假设，套餐越适用用户自身所需通话量，用户满意度越高，则使用该套餐人数越多。根据附件1中关于2006年移动电话通话量方面的数据，假设本地通话时长、新增移动用户数的增长速率不变，得到平均每户每月的本地通话时长为330分钟。

② 当用户根据每月通话分钟数选择套餐时，所选方案应该是每月支出总费用最少的方案，即

$$\bar{f}_1 = \min_{1\le i\le 7} f(s)$$

$$f(s) = \begin{cases} f_{i0}, & s \le T_{i1}, \\ f_{i0} + (s - t_{i0})m_{i0}, & s > T_{i1}. \end{cases}$$

③ 在已知用户每月所需要的通话分钟数的条件下，新套餐本地主叫资费应低于用户在现有套餐中所选择最优套餐的本地主叫资费，且新方案的短信资费用应低于现有套餐的短信的最优资费，即

$$p_1 \le \bar{p}_1, \qquad p_2 \le \bar{p}_2.$$

$p_1 =$ (新套餐的最低月使用费×基本通话费所占月基本费的百分比)÷新套餐的主叫时间，即

$$p_1 = kf_0/s_1.$$

$p_2 =$ (1- 基本通话费所占月基本费的百分比)× 新套餐最低月使用费÷新套餐的短信条数，即

$$p_2 = (1-k)f_0/s_2.$$

④ 在现有套餐下，消费 s_2 条短信的最低费=现有套餐最优短信资费新套餐的短信条数，即

$$\bar{f}_2 = \bar{p}_2 s_2.$$

⑤ 新设计的方案给运营商带来的收入较现有“套餐”方案运营商的收入降低应不超过10%，即

$$f_0/(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) \ge 0.9.$$

⑥ f_0 越小则对每月所需的主叫时长同该新套餐的主叫时间相符的用户群的吸引力越大

$$\min f_0.$$

⑦ 假设 k 与用户偏好有关，用户对套餐各个项目的偏好程度不同，k 值就不同。当用户偏好主叫通话时，则 k 值越大；相反，如果用户对其它项目偏好越大，则 k 值越小。据调查，高端用户对其它项目偏好很小，对通话的偏好程度很高，假设 $k1$。综上可得

$$
\min f_0
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
\bar{f}_1 = \min\limits_{1\le i\le 7} f(s),\\
f(s) = \begin{cases} f_{i0} s \le T_{i1}, \\ f_{i0} + (s - t_{i0}) m_{i0}, \quad s > T_{i1}, \end{cases}\\
p_1 \le \bar{p}_1,\\
p_1 = k f_0 / s_1,\\
p_2 \le \bar{p}_2,\\
p_2 = (1-k) f_0 / s_2,\\
\bar{f}_2 = \bar{p}_2 s_2,\\
f_0 / (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) \ge 0.9.
\end{cases}
$$

用 matlab 编程求解，并对结果优化，得出我们所设计的“畅听”升级版套餐如表6所示

表6: “畅听”升级版套餐

月基本费(元)	包含本地主叫(分钟)	超出后的本地主叫费(元/分钟)
61	330	0.19
110	660	0.17
144	1000	0.14

第一问案例中的用户若选择新设计的套餐时，总费用

$$
F = f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} + f_{i5} + f_{i7} = 61 + 3090.07 + 480.3 + 0.1 = 96.73 < 125.53.
$$

结论：对于手机的通话时间同案例中相符的该类人群选用“畅听”升级版套餐，在他们看来此方案优于“99畅听套餐”。同时若用户选择全球通68套餐，我们所设计的套餐同样低于68元套餐，同时也论证了该方案的可行性和合理性，并具有一定的吸引力。

4 模型的进一步讨论

以上建立的是关于资费的计算及其比较、评价模型。模型是在对有些复杂问题简单化的基础上建立的，是一种理想状态，对模型的进一步优化可以从以下几个方面考虑：

首先，月资费的计算应考虑优惠时段和在无套餐全球通方案中拨中国移动 IP 拨打国内长途、港澳台和国际长途电话的情况；其次，对各方案评价的标准的扩展；最后，吸引力函数的合理性还值得进一步讨论。

参考文献：

[1] 李京淑. 全球通畅听99掀起单向收费[OL]. http://bjyouth.ynet.com/article.jsp?oid=18969344 & pageno=2 2007年2月14日

第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0138-07

手机“套餐”资费问题的评价与优化设计模型

韩中庚
(解放军信息工程大学信息工程学院，郑州 450002)

摘 要: 本文的问题是2007年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛的C题。首先，文章建立了手机“套餐”资费问题的评价与优化设计模型，并给出了求解结果，最后对评卷的具体情况做了简要的评述。

关键词: 手机套餐; 套餐资费; 边际效能; 优化模型

分类号: AMS(2000) 90C05 中图分类号: O221 文献标识码: A

1 问题的提出

对于手机资费问题一直是人们关心的热点问题，多少年来手机资费始终没有实质性变化。但是，2007年以来先后有上海、北京等地的移动和联通两大运营商都相继推出了所谓的“手机单向收费方案”—各种品牌的套餐，广大手机用户好像是看到了单向收费的希望。事实上，运营商都是以所谓的套餐形式推出的，手机套餐的花样实在多得惊人，如北京的“99套餐”；上海“68套餐”等等。于是，人们不禁要问：“手机套餐究竟优惠几何？”正是在这样的背景下竞赛题针对北京的“99套餐”和上海的“68套餐”提出了四个具体的问题。

2 问题的分析

首先，我们知道各地的套餐都是针对全球通用户，其他的手机用户无效。同时，注意到北京、上海的套餐都是针对本地通话费，而没有涉及长途通话费。虽然套餐优惠都是针对本地通话资费的，但在具体内容上还是有区别的。即北京的套餐内有主叫和被叫之分，而上海的套餐没有区分主叫和被叫，对此分别进行分析研究。判断一个套餐方案的优劣，从经济学的角度，应该考虑投入与产出的费效比，即根据费效分析法，一个好的方案应该使得费效比尽量的大[1]。

注意到各套餐方案都与全球通50元的基本费无关，为此不考虑这部分费用；因套餐对漫游无效故不考虑漫游；套餐用户都达到套餐规定的最低通话量，否则也按最低通话量计算。

3 问题的模型建立与求解

3.1 问题(1)的比较分析模型

根据各种套餐的设置方案，所述的本地主叫通话时间 T 包括拨打本地电话的时间和直接拨打国内异地电话时间、国际长途电话时间、港澳台长途电话的时间，分别记为 t_1, t_2, t_3, t_4；以及用 IP 拨打国内异地长途电话、国际长途电话、港澳台长途电话的通话时间，分别记为 I_1, I_2, I_3。即

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3, \tag{1}$$

为此，一个套餐用户的本地主叫通话费用为

$$P_b = \begin{cases} P_0, & T \le T_0, \\ P_0 + p_0(T - T_0), & T > T_0. \end{cases} \tag{2}$$

其中 P_0 表示套餐月租费，T_0 表示套餐内包本地通话时间，p_0 表示套餐内本地主叫通话费(元/分钟)。对全球通的原来资费方案的记费标准，每次通话的本地主叫通话费计算方法为

$$Q_b^{(1)} = 0.4T = 0.4(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3), \tag{3}$$

一段时间的总本地主叫通话费为 $Q_b = \sum Q_b^{(1)}$。则每一次通话的总费用为

$$Q_z^{(1)} = Q_b^{(1)} + p_1\lfloor\frac{60t_2}{6}\rfloor + p_2\lfloor\frac{10t_3}{6}\rfloor + p_3\lfloor\frac{10t_4}{6}\rfloor + p_4\lfloor I_1\rfloor + p_5\lfloor I_2\rfloor + p_6\lfloor I_3\rfloor + p_7\lfloor m\rfloor, \tag{4}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向上取去整运算。p_i $(i=1,2,3)$ 分别表示直拨国内、国际、港澳台的长途的单价，p_i $(i=4,5,6)$ 分别表示用 IP 拨打国内、国际、港澳台长途的单价。根据目前的记费标准，国内长途分闲时和忙时，闲时 $00:00\sim 7:00$ 为优惠时段，其他时间为忙时，优惠时段国内长途为0.04元/6秒钟，国际长途0.48元/6秒钟。国际 IP 长途按不同的国家资费不同，I 类国家(美国、加拿大)为2.40元/分钟、II 类国家(英国、法国、意大利、德国、新西兰、韩国、日本、澳大利亚、新加坡、马来西亚、泰国、印尼、菲律宾)为3.60元/分钟、其他国家为4.60元/分钟。p_7 表示漫游通话单价，m 表示国内漫游通话时间。具体的取值为

$$p_1 = \begin{cases} 0.04, & 0:00\sim 7:00, \\ 0.07, & 7:00\sim 24:00, \end{cases} \qquad p_2 = \begin{cases} 0.48, & 0:00\sim 7:00, \\ 0.60, & 7:00\sim 24:00, \end{cases} \qquad p_3 = 0.2,$$

$$p_4 = 0.3, \qquad P_5 = \begin{cases} 2.40, & \text{I 类国家}, \\ 3.60, & \text{II 类国家}, \\ 4.60, & \text{其他国家}. \end{cases} \qquad p_6 = 1.50, \quad p_7 = 0.60.$$

则任一段时间的总通话费用为

$$Q_z = \sum Q_z^{(1)}. \tag{5}$$

1) 北京的“99套餐”方案

对于北京的“99套餐”用户而言，每一次本地的主叫通话费由(1)式和(2)式确定，而该用户的每月总的通话费用为

$$P_z = P_b + P_c, \tag{6}$$

这里 P_0 分别为99，139，199，299(元)；相应的 T_0 分别为280，560，1000，2000(分钟)。P_c 为非本地通话费用的总和，即每一次通话的费用为

$$P_c^{(1)} = p_1\lfloor\frac{60t_2}{6}\rfloor + p_2\lfloor\frac{10t_3}{6}\rfloor + p_3\lfloor\frac{10t_4}{6}\rfloor + p_4\lfloor I_1\rfloor + p_5\lfloor I_2\rfloor + p_6\lfloor I_3\rfloor + p_7\lfloor m\rfloor, \tag{7}$$

其中 $p_4 = 0.1$ 元/分钟，其他都与(4)式相同。则 $P_c = \sum P_c^{(1)}$。

对于北京的全球通用户根据自己以往通话量，可以考虑选择还是不选择套餐方案，在确认要选用套餐时又适合选择何种方案？同时注意到四种套餐方案的月租费 P_0，即相当于用原方案的通话量 $(P_0/0.4)$ 分别为 247.5，3347.5，497.5，747.5(分钟)。则有如下结论：

当一个用户每月的本地主叫通话费 $Q_b < 99$ 元时，则该用户不适宜选择任何一种“套餐”方案；否则，该用户应根据每月本地主叫通话量 T 的多少选择适宜的一种套餐方案：

1) 当 $247.5 \le T < 347.5$ 时，则该用户适合选择“99套餐”方案。

2) 当 $347.5 \le T < 497.5$ 时，则该用户适合选择“139套餐”方案。

3) 当 $497.5 \le T < 747.5$ 时，则该用户适合选择“199套餐”方案。

4) 当 $T \ge 747.5$ 时，则该用户适合选择“299套餐”方案。

用户可以用(5)(6)和(7)式来核算比较相应总的通话费用。

2) 上海的“68套餐”方案

对于上海的套餐用户而言，本地的通话(含主被叫)量为

$$T = T_1 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3,$$

则套餐用户的本地通话费用可用(2)式计算。每月的总通话费用计算方法与(6)和(7)式相同，在(7)式中 $p_4 = 0.30$ 元/分钟，其他不变。上海的全球通用户根据自己以往通话量，可以决定是否选择套餐方案，在确认选用时又选择何种套餐？同时注意到三种套餐方案的月租基本费 P_0，即相当于用原方案的通话量 $(P_0/0.4)$ 分别为 170，320，420 (分钟)。则有如下结论：

当一个用户每月的本地主叫通话费 $Q_b < 68$ 元时，则该用户不适宜选择任何一种套餐方案；否则该用户应根据每月本地主叫通话量 T 的多少选择适宜的一种套餐方案：

1) 当 $170 \le T < 320$ 时，则该用户适合选择“68套餐”方案。

2) 当 $320 \le T < 420$ 时，则该用户适合选择“128套餐”方案。

3) 当 $T \ge 420$ 时，则该用户适合选择“168套餐”方案。

用户可以用(5)(6)和(7)式来核算比较相应总的通话费用。

3.2 问题(2)的评价模型

1) 北京的“99套餐”方案的评价分析

首先将北京的四种套餐方案与原方案作一比较，四种套餐方案的最低消费额分别为 99，139，199 和 299 元。只要主叫时间不超过相应的包打时间 T_0，不另记费，超过部分按相应的标准 p_0 元/分钟记费。如果用户本地主叫时间达不到时间 T_0，则同样也按 T_0 计算，当月核算，不可累计。事实上，对于各套餐方案都有 $P_0/T_0 \approx p_0$，即套餐内的本地主叫通话费基本与套餐外的主叫通话费相同。国内 IP 长途通话费为 0.10 元/分钟，每分钟比原方案优惠 0.20 元。而原方案没有最低消费，不打电话不交费，多打电话多交费，但其通话费用相对较高，并且是双向收费，长途通话费用也相对较高。四种套餐方案都体现了“薄利多销”的经营策略。

为了分析比较各方案的优劣及合理与否，在这里采用经济学中费效分析方法。首先考虑到各套餐方案所交费用的不同，产生的效果(优惠幅度)也不同，即费效不同。对于北京的四种套餐方案优惠的项目有本地主叫、本地被叫和国内 IP 长途费用三项，但事实上，套餐内包打本地的时间正好就是所交费用按相应标准的通话时间，即套餐内外的资费标准是相同的。各方案的效能定义为

$$套餐方案效能 = 原方案的资费 - 套餐方案的资费。$$

具体各方案的结果如下表1所示。

表1: 北京各套餐方案的效能对照表 单位：元/分钟

方案	套餐月租	本地主叫优惠	本地被叫优惠	本地通话平均优惠 (c_1)	IP 国内长途优惠 (c_2)
99	99	0.05	0.40	0.225	0.20
139	139	0.15	0.40	0.275	
199	199	0.20	0.40	0.30	
299	299	0.25	0.40	0.325	

由于原方案本地主、被叫的资费相同，均为 0.40 元，通常情况下，全球通手机用户的主被叫的机会基本相同，为此本地通话费可以取二者的平均值。IP 国内优惠数为 0.20 元/分钟。根据信息产业部公布的2006年的统计数据表明，2006年全年手机用户总通信量为 18357.3 亿分钟，具体的各类通信数据如下表2所示。

表2: 2006年全国手机用户的通信量

通信类别	本地通信	IP 国内长途	IP 港澳台长途	IP 国际长途	直拨国内长途	直拨港澳台长途	直拨国际长途
通信量(亿分钟)	15882.7	1465.6	12.3	10.7	977.8	4.0	4.2
占总量的百分比 (w_i)	0.86598	0.07984	0.00067	0.0058	0.05326	0.00023	0.00022

取各类通信时间的比率作为相应的权值，即本地通信量、IP 国内长途的权值分别为 w_1，w_2。为此定义各套餐方案的综合效能函数为 $W = w_1c_1 + w_2c_2$，则相应的各方案费效比为 W/P_0。费效比主要反映用户投入与收益效果的指标。而对运营商来说，判断一个方案优劣通过一个收益指标来反映，在此定义为

$$A = w_1(0.4x_1 + 0.6x_2) + w_2x_3,$$

其中 x_1，x_2，x_3 分别表示本地主叫、本地被叫、国内 IP 长途费用单价。指标 A 反映一个方案对运营商的相对效益的大小。具体计算结果如下表3所示。

表3: 北京各套餐方案的综合效能和费效比

方案	套餐月租费 (P_0)	综合效能 (W)	效能比 (W/P_0)	收益指标 (A)	方案优劣排序
99	99	0.2108	0.0021	0.12922	1
139	139	0.2541	0.0018	0.09458	2
199	199	0.2758	0.0014	0.07727	3
299	299	0.2974	0.000995	0.05994	4

由结果可知，四种套餐优劣排名是依次排列的，说明该套餐方案的设计还不尽合理。

2) 上海的“68套餐”方案的评价分析

将上海的三种套餐方案与原方案作分析比较。三种套餐方案的最低消费额分别为 68，128，168 元，只要本地通话时间不超过相应的时间 T_0，不另记费，超过部分主叫按相应的 p_0 元/分钟记费。本地通话时间达不到 T_0，也按 T_0 计算。事实上，对三种套餐内的本地通话费 (P_0/T_0) 分别为 0.19，0.16，0.14 (元/分钟)。同原方案比较，类似于北京的套餐方案，相应地效能指标如下表4所示。

表4: 上海各套餐各方案的效能对照表　　单位：元/分钟

方案	套餐月租费(元)	套餐内本地主被叫资费	套餐内本地主被叫优惠数 (c_1)	套餐外本地主叫资费	套餐外本地主叫优惠数 (c_2)	套餐外本地被叫优惠数 (c_3)
68	68	0.19	0.21	0.18	0.22	0.40
128	128	0.16	0.24	0.16	0.24	0.40
168	168	0.14	0.26	0.13	0.27	0.40

该套餐只对本地的通话费用有优惠，而其他项目均与原方案相同。但从这些指标可知，套餐内并不是单向收费，套餐外为单向收费，其效能的计算方法同北京的套餐效能相类似。考虑到主

叫与被叫机会基本相同的情况，但人们更偏重于接听免费的影响；同时套餐内的影响应稍大于套餐外的影响。为此，在此取效能函数为

$$W = w_1[0.6c_1 + 0.4(0.4c_2 + 0.6c_3)].$$

类似地，定义运营商的收益指标为

$$A = w_1[0.6x_1 + 0.4(0.4x_2 + 0.6x_3)] + w_2x_4,$$

其中 x_1，x_2，x_3 分别表示套餐内本地主被叫、套餐外本地主叫、套餐外本地被叫、国内 IP 长途费用单价。对三种方案的具体情况进行计算，相应各方案的效能 W，费效比 W/P_0 的指标值和运营商的收益指标值 A 如下表5所示。由结果可知，三种套餐优劣排名是依次排列的。

表5：上海各套餐方案的综合效能和费效比

方案	套餐月租费 (P_0)	综合效能 (W)	效能比 (W/P_0)	收益指标 (A)	方案优劣排序
68	68	0.2227	0.0033	0.1476	1
128	128	0.2411	0.0019	0.1293	2
168	168	0.2556	0.0015	0.1147	3

3.3 问题(3)的评价方法

北京移动公司2007年5月23日又推出了所谓的全球通“被叫全免费计划”方案，实质上也是一个套餐方案，同样也不是真正的单向收费方案。用上述问题(2)的方法类似地可以说明，对多数一般的用户并不合算，它适用于本地通话量较大的用户。

3.4 问题(4)的方案设计模型

一个合理的套餐方案，就应该是使得费效比或边际效能尽量的大，无论是从运营商，还是从用户的角度都是合理的。为此，根据北京、上海的实际情况，在已有套餐方案的基础上来设计更合理的套餐方案。

1) 北京的“套餐”方案的设计

根据北京已有的套餐方案，在这里还是不考虑套餐内和套餐外的区别，同样不考虑国际和港澳台的长途通话优惠问题。假设决策变量 x_1，x_2，x_3 分别表示套餐方案中本地主叫通话、本地被叫通话、IP 国内长途通话单价。P, T 分别表示套餐的月租费和包打本地通话时间。要设计一个新的方案，是在保证运营商的收益降低不超过 10% 的前提下，尽量让用户有更大收益。根据边际效能最大的原则，建立下面的优化模型

$$\max z = \frac{1}{P}\{w_1[0.4(0.4-x_1) + 0.6(0.4-x_2)] + w_2(0.3-x_3)\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_1(0.4x_1 + 0.6x_2) + w_2x_3 \geq 0.9A, \\ A = w_1(0.4p_1 + 0.6p_2) + w_2p_3, \\ P/T \leq x_1 \leq 0.4, \quad 0 \leq x_2 \leq x_1, \quad 0.1 \leq x_3 \leq 0.3, \\ P = 99,\ 139,\ 199,\ 299, \quad T > 0, \quad \text{且为整数}. \end{cases}$$

这是一个简单的规划模型，用 LINGO[2]求解所得最优方案如下表6所示。由结果可知，现行的四种套餐方案设计是不太合理的，即应该在保证运营商的利益不受太大损失的前提下，尽量让利给消费者，这样更能吸引更多的用户使用套餐。关于套餐月租费设置是另外的问题，譬如取 $P = 66$, 166, 266, 366 或 $P = 88$, 188, 288, 388，则可以得到相应的“66套餐”和“88套餐”等等。

表6: 北京更好的套餐方案

方案	套餐月租费 (P_0)	包本地主叫时间(分钟)	本地主叫资费(元/分钟)	本地被叫资费(元/分钟)	国内 IP 长途资费(元/分钟)	费效比 (W/P_0)
99	99	371	0.27	0	0.30	0.00257
139	139	787	0.18	0	0.30	0.00205
199	199	1512	0.13	0	0.30	0.00151
299	299	3453	0.09	0	0.30	0.00106

2) 上海的“套餐”方案的设计

根据上海现有的套餐方案，假设决策变量 x_1，x_2，x_3，x_4 分别表示套餐内本地主被叫通话、套餐外本地主叫通话、套餐外本地被叫通话、IP 国内长途通话的单价。P, T 分别表示套餐的月租费和包打本地通话时间。则类似地有下面的优化设计模型

$$\max z = \frac{1}{P}w_1\{0.6(0.4-x_1)+0.4[0.4(0.4-x_2)0.6(0.4-x_3)]\}+\frac{1}{P}w_2x_4)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_1[0.6x_1+0.4(0.4x_2+0.6x_3)]+w_2x_4\geq 0.9A, \\ A=w_1[0.6p_1+0.4(0.4p_2+0.6p_3)]+w_2p_4, \\ P/T\leq x_1\leq 0.4,\quad x_1\leq x_2\leq 0.4,\quad 0\leq x_3\leq x_2,\quad 0.1\leq x_4\leq 0.3, \\ P=68,\ 128,\ 168,\quad T>0,\quad \text{且为整数}. \end{cases}$$

用 LINGO 求解所得最优方案如表7所示。与上海的现行套餐方案进行比较可知，现行的三种套餐方案设计的也是不尽合理。这里关于套餐月租费 P 的取值也可取其他的数值，从而可得到相应的方案。从这些方案可知，在保证运营商的利益没有受太大损失的情况下，对用户还有很大的优惠空间。

表7: 上海更好的套餐方案

方案	套餐月租费 (P_0)	包本地主被叫时间	套餐内本地主被叫资费	套餐外本地主叫资费	套餐外本地被叫资费	国内 IP 长途资费	费效比 (W/P_0)
68	68	509	0.13	0.40	0	0.10	0.00349
128	128	1200	0.11	0.40	0	0.10	0.00197
168	168	1895	0.09	0.40	0	0.10	0.00155

4 对手机“套餐”优惠几何问题答卷的评述

手机“套餐”优惠几何问题今年被用作全国大学生数学建模竞赛乙组的竞赛题，并且赛后参加了全国和湖北、湖南及河南赛区的评卷工作，当中评阅了很多同学的参赛论文，我的感受是有喜也有忧。今年乙组参赛队全部是由在校专科学生组成的，参赛论文的整体水平都有很大的提高，这是让人高兴的事。同时，在具体问题上对问题的细节和关键环节把握上还有不尽人意之处。具体表现有以下几个方面：

1) 手机资费问题几乎涉及到在校学生的每一个人，但从完成的论文来看，并不是参赛学生都对这个生活中的问题都能认识清楚，而且都能够把有关的资费问题算得明白。尤其是手机套餐都涉及到本地通话费问题，而对“本地通话费”包含哪些内容，真正算清楚的不多。就题

目的第一问而言，虽然所有的参赛队都给出了各种各样的计算公式或方法，但准确、全面的也不多见。

2) 关于对各套餐方案适应于什么用户的讨论，大都根据用户通话时间的多少给出了相应的结论，但多数答卷在时间段的化分上不够准确。

3) 第二问要求对各套餐方案与现行的方案进行分析、比较和评价。注意到，实际中要评价一个方案的优劣，总是应该有一个全面评价方案优劣的指标，指标应综合考虑到移动公司和用户两个方面的利益，单纯考虑一个方面的利益是不太合适的。可喜地是很多论文都定义了相应的指标，例如有的用“方案的费用差”、“方案的通话费率”、“方案的优惠度”等等作为评价指标，都有一定的意义，但多数是只站在了用户的利益上，不尽合理。

4) 在这个问题中有不少的参赛队用了层次分析和模糊评判等方法，这里似乎有一个错觉，一遇到有关“评价”字眼的问题就想到用这些方法，不考虑方法的适用与否。事实上，这个问题似乎不适合用这些方法。这也值得引起我们指导老师的注意，在给学生讲各种建模方法的同时，也应该告诉学生相应的方法适用于解决什么样的问题。

5) 题目的第四问是要求在北京和上海现有套餐的基础上设计更合理的套餐。可行的方法应是在第二问评价结果的基础上，建立优化模型，通过求解得到“更合理”的方案。在全国的参赛答卷中，我们看到了有不少的答卷给出了形式各异的优化模型，也得到了相应的结果。但多数都是在现有套餐方案的基础上直观地修改一些指标得到新方案，一般认为这种结果缺少说服力。

6) 在全国的参赛论文中，还有的用到了一些比较有创意的方法，如几何图形法、抽样理论、数据模拟和经济学中效用理论、边际分析、剩余理论等方法。

5 结束语

手机套餐优惠几何作为赛题是属于一个“即时性”的问题，也紧跟社会的热点，与老百姓的生活密切相关，这也反映出数学建模的问题来自于实际、应用于实际的特点。从竞赛结果来看，这个题目对于在校的专科学生来说，无论是从题型、知识面，还是解题方法应是合适的。

2007全国大学生数学建模竞赛活动圆满的结束了，这项赛式已走过了第16个年头，作为一个从事这这项工作十多年的建模爱好者，看到现在全国数学建模活动的发展规模和水平，让人由衷的高兴和欣慰。在此，也衷心地祝愿全国大学生数学建模活动更健康有序地发展，不断地提高水平，为国家培养更多的创新型高素质人才服务。

致谢：全国组委会的专家在命题讨论过程中给予了很多指导和帮助，特别是清华大学的姜启源教授和北京大学的孙山泽教授，在一些具体的细节问题上提出了很多建设性的意见，在此，一并表示感谢。

参考文献：

[1] 韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2005

[2] 谢金星，薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005

The Evaluation Model and Optimal Design about the Problem of How Many Benefits A Package Deal Offers

HAN Zhong-geng

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, PLA, Zhengzhou 450002)

Abstract: In this paper, according to the grading process of problem C of 2007 Higher Education Press Cup CUMCM, we establish the evaluation model and optimal design model about the problem of how many benefits a package deal offers, the results of the problem are obtained. At last the brief comments are given about correcting specific cases.

Keywords: handset packages; package deal offer; marginal effectiveness; optimal model

第24卷 增刊2 工 程 数 学 学 报 Vol. 24 Supp.2
2007年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0145-06

体能测试时间安排

崔国富，刘 贺，郝鹏志
指导教师：郑智刚
(石家庄铁路职业技术学院，石家庄 050041)

编者按： 本文的优点是思路清晰，能抓住问题的关键是使台阶测试不间断的进行，算出全部做完台阶测试所需要的时间，从而推出最少需要4个时间段。在尽量做到台阶测试不间断的前提下，使学生等待的时间最短，再把学生分成学号相连的20个人为一组进行测试。本文的另一优点是语言简洁，说理清楚，对学生的等待时间有确切的定义，不足之处是没有计算过程和方法。

摘 要： 本文对某学校的学生体能测试时间安排问题进行分析，应用解决多因素问题要抓住主要矛盾的思想方法，找出安排体能测试方案的关键是台阶实验，得到了在满足完成整个测试所需时间段数最少(四个时间段) 的条件下，使学生平均等待时间最小的计算方法，并计算出最小平均等待的时间为：6.22分钟，并且设计出实现此目标的测试方案(第3页流程图)和时间安排表(第4页表三)。按照本文给出的测试方案，当台阶测试仪器的数量增加一倍时，每轮可安排40人进行测试，这时跳远测试仪器和肺活量测试仪也应增加一倍，但身高体重测量仪器却可以减少一台，握力测量仪器数量不变。

关键词： 时间段；平均等待时间；测试流程

分类号： AMS(2000) 15A18 **中图分类号：** O241.6 **文献标识码：** A

1 问题重述（略）

2 符号说明

T_{l1}：第 l 时间段的开始时间(其中 $l=1,2,3,4$)
T_{l2}：第 l 时间段的结束时间(其中 $l=1,2,3,4$)
t_k：第 k 个班级的开始时间
Y：最终的平均等待时间
$y_i(X,A)$：第 i 次测试班级的平均等待时间 ($i=1,2,\cdots,56$)
n_k：第 k 个班级的人数 ($k=1,2,\cdots,56$)
b_i：第 i 次测试剩余的人数 ($i=1,2,\cdots,56$)
N_i：第 i 次测试时班级的人数
N：各班的人数总和

3 问题分析

我们先假设参加体能测试的学生学号相连，且全体2036名学生只做台阶试验一项，全部做完台阶实验所用的时间可由下式计算得到

$$[(2036/10)\times 210+5]/3600=11.88\text{小时}=11\text{小时}53\text{分}.$$

而每天做测试的时间是7小时25分(2个时间段)，3个时间段为11小时35分(4小时10分+3小时15分+ 4小时10分=11小时35分)小于11小时53分，因此完成测试至少需要4个时间段。根据问题提供的数据可知，五项测试中花费时间最多的一项是台阶测试，做台阶测试，每次最多只能做10人，我们应使台阶测试不间断地进行，尽量不要使其留有空余位置，以便节省测试时间和减少学生的等待时间，其他测试应在台阶测试的同时进行，这样我们要对测试过程进行优化编排。选取学号相连的20名学生(不妨假设取1-20号)做测试，其中10人(1-5号和11-15号)做台阶测试，另外10人(6-10号和16-20号)进行前四项测试。根据题中所给的数据得到1-5号和11-15号学生做完台阶测试需要210秒，则其余10人前四项的测试必须在210秒内完成，所以还需要对这10个人(6-10号和16-20号)的前四项测试安排进一步优化，使其在210秒内完成。又因为立定跳远和肺活量各只有一台，且测试时间都为20秒/人；握力测试器有两台，每台测试时间为15秒/人；身高体重测试仪器三台，每台测试时间需要10秒/人。可以看出，立定跳远和肺活量的测试时间远大于其他两项，所以将这10名学生按学号分成2组：6到10号做肺活量测试，其中等待6号做肺活量测试的学生在此时间内可以去做握力测试，当6号做完肺活量测试后转做握力测试，7号紧接着做肺活量测试，其余三名学生按学号顺序依次进行；16到20号做立定跳远测试，其中等待16号做立定跳远测试的学生在此时间内可以去做身高体重测试，当16号做完立定跳远测试后转做身高体重测试，17号紧接着做立定跳远测试，其他三名学生按学号顺序依次进行，详情按排见表1(表中数字为学生学号)：

表1: 体能测试表

时间	体重与身高测试 (10秒/人)			立定跳远测试 (20秒/人)	肺活量测试 (20秒/人)	握力测试 (15秒/人)		台阶测试 (210秒/5人)	
0(秒)	录入	录入	录入	录入	录入	录入	录入	录入(甲)	录入(乙)
5(秒)	17	18	19	16	6	7	9		
15(秒)			20						
20(秒)				17		8	10		
25(秒)					7				
30(秒)	16							1–5	11–15
35(秒)						6			
45(秒)				18	8				
65(秒)				19	9				
85(秒)				20	10				
105(秒)				结束	结束				

由表中数据可知，6-10号完成肺活量和握力两项测试与16-20号完成身高体重和立定跳远两项测试都各需要105秒，然后6-10号与16-20号交换测试项目，6-10号做立定跳远和身高体重测试，16-20号做肺活量和握力测试。从而推出6-10号和16-20号完成前四项测试需210秒，该时间小于完成一次台阶测试所需要的时间(215秒)，显然6-10号和16-20号在215秒内可以完成前四项测试，然后6-10号到甲台阶试验测量仪器进行测试，16-20号到乙台阶试验测量仪器进行测试，然后1-5号和11-15号进行前四项测试。

由前边的计算可以得出这20人全部做完测试需要约等于7分5秒(425秒)，如果一个班40人，那么经过适当编排则可在14分5秒(425秒+420秒=845秒)内完成，对有出现一次

不连号的情况应加上5秒，即14分10秒。若在某一个时间段中，余下的时间不足以使得一大组完成测试，即测试停止。

4 模型假设

1) 假设每台测试仪器每次都正常工作；
2) 假设以班级为单位进场进行体能测试；
3) 假设不同班级的学生学号不相连；
4) 假设每位学生做完五项测试后才离开，不允许中途离开；
5) 假设学生等待时间为离场时间与进场时间之差；
6) 忽略任意一位学生在测试各项目时中间的转换时间；
7) 假设在测试过程中秩序良好，不会出现混乱而耽误测试时间。

5 模型建立与求解

我们定义每个班的平均等待时间为

$$y_i = \frac{\text{班级中每个人的等待时间之和}}{n_k(\text{班级人数})}.$$

根据学校的仪器设备情况，我们决定以20人的测试为一轮，由于班级人数不等，不一定恰好出现20的整数倍，在这种情况下为了减少等待时间，可以17人、18人、19人为一大组进行测试。根据计算，在四个时间段内可以全部完成体能测试，问题是如何安排各个班级的进场顺序使最终平均等待时间最短，即求

$$Y = \min_A \Big[\sum_{i=1}^{56} y_i(X, A) \times \frac{N_i}{N}\Big],$$

满足：$t_k + \delta(i) \in \bigcup_{l=1}^{4}[T_{l1}, T_{l2}]$，即同一班中的所有学生应在同一时段内完成所有项的测试，其中 X 为测试方案，$A(a_1, a_2, \cdots, a_{56})$ 为56个班级的排序，$\delta(i)$ 为其完成测试所需要的时间。我们将17名为一大组到20名为一大组连号的学生分别做测试，然后经过计算得出的平均每人的等待时间如下表2：

表2: 等待时间

组别	20名一组	19名一组	18名一组	17名一组
平均等待的时间(分)	2.13	2.11	1.92	1.74

对至多出现一次不连号的学生，我们在上面平均等待时间的基础上再加上5秒钟。由于有的时候，有的班级测试会有余下的人数(小于17)，那么这部分自动记入下一个班级的测试人数，即：$N_i = n_k + b_{i-1}$，我们的原则是尽量使 N_i 能够不再产生新的剩余人数为前提，这样能最大限度的减少平均等待时间，于是测试人数尽可能的在17到20之间，或37到40之间，或57到60之间，且使完成测试人数的时间不跨越2个时间段。根据表2的数据，通过计算，我们将各班级测试时间安排如下表3：

表3: 各班测试时间安排

序号 i	班号 k	入场时间 (时:分:秒) t_k	班级人数 n_k	耗时 δ_i	完成人数	平均等待时间(分钟) y_i
1	1	8:00:00	41	14分5秒	40	5.87
2	26	8:14:05	36	14分10秒	37	5.21
3	31	8:28:15	41	14分5秒	40	5.87
4	11	8:42:20	37	14分10秒	38	5.39
5	48	8:56:30	41	14分5秒	40	5.87
6	38	9:10:35	37	14分10秒	38	5.39
7	7	9:24:45	42	14分5秒	40	6.10
8	43	9:38:50	37	14分10秒	39	5.58
9	49	9:53:00	42	14分5秒	40	6.10
10	55	10:07:05	17	7分10秒	19	2.11
11	51	10:14:15	42	14分5秒	40	6.10
12	56	10:28:20	17	7分10秒	19	2.11
13	3	10:35:30	44	14分5秒	40	6.45
14	30	10:49:35	33	14分10秒	37	4.13
15	4	11:03:45	44	14分5秒	40	6.45
16	32	11:17:50	33	14分10秒	37	4.13
17	47	11:32:00	43	14分5秒	40	6.27
18	20	11:46:05	35	14分10秒	38	5.39
19	8	12:00:15	20	7分5秒	20	2.13
20	5	13:30:00	26	7分5秒	20	3.28
21	29	13:37:05	32	14分10秒	38	5.39
22	23	13:51:15	28	7分5秒	20	3.55
23	33	13:58:20	51	21分20秒	59	9.10
24	9	14:19:40	20	7分5秒	20	2.13
25	17	14:26:45	20	7分5秒	20	2.13
26	27	14:33:50	20	7分15秒	20	2.13
27	35	14:40:55	20	7分5秒	20	2.13
28	36	14:48:00	20	7分5秒	20	2.13
29	42	14:55:05	40	14分5秒	40	5.68
30	10	15:09:10	38	14分5秒	38	5.39
31	19	15:23:15	39	14分5秒	39	5.58
32	41	15:37:20	42	14分5秒	40	9.47
33	21	15:51:25	38	14分5秒	40	2.49
34	46	16:05:30	42	14分5秒	40	9.47

表3: 各班测试时间安排的续表

序号 i	班号 k	入场时间 (时:分:秒)t_k	班级人数 n_k	耗时 δ_i	完成人数	平均等待时间(分钟)y_i
35	22	16:19:35	38	14分5秒	40	2.49
36	52	16:33:40	19	7分5秒	19	2.11
37	34	8:00:00	39	14分5秒	39	5.58
38	39	8:14:05	38	14分5秒	38	5.39
39	40	8:28:10	39	14分5秒	39	5.58
40	53	8:42:15	39	14分5秒	39	5.39
41	18	8:56:20	30	7分5秒	20	5.58
42	44	9:03:25	50	21分20秒	60	5.58
43	25	9:24:45	30	7分5秒	20	3.79
44	45	9:31:50	50	21分20秒	60	9.23
45	2	10:53:10	45	14分5秒	40	6.63
46	13	11:07:15	45	14分5秒	40	5.96
47	14	11:21:20	45	21分20秒	55	8.41
48	15	13:30:00	45	14分5秒	40	6.63
49	16	13:44:05	44	14分5秒	40	5.80
50	6	13:58:10	44	14分5秒	40	3.35
51	12	14:12:15	25	14分10秒	38	5.39
52	50	14:26:25	45	14分5秒	40	6.63
53	37	14:40:30	44	14分5秒	40	5.80
54	24	14:54:35	25	7分5秒	20	4.18
55	28	15:01:40	24	14分10秒	38	5.39
56	54	15:15:50	75	28分10秒	75	11.94

由

$$Y = \min_{A} \Big[\sum_{i=1}^{56} y_i(X,A) \times \frac{N_i}{N} \Big],$$

计算得到最小平均等待时间为：$Y = 6.22$ 分钟。

6 模型评价与推广

该模型对学生体能测试中的时间安排问题进行了分析，前提条件是在最少的时间段内，而不是最短时间，列出了学生做体能测试的时间安排表，这样可以减少不必要的时间浪费，使学生的等待时间最少。本问题主要是根据台阶测试仪器的数量来决定学生每一轮测试学生的人数。经过对模型的分析，我们可以发现如果台阶测试仪器的数量增加一倍，跳远测试仪器和肺活量测试也应增加一倍，但身高体重测量仪器却可以减少一台，握力测量仪器数量不变，理由如下：根据我们的测试流程安排，在四台台阶测试仪，其它测试仪器各两台的情况下，每轮可

安排40人进行测试，由前面表一计算结果可以看出在210秒内，20人可以完成跳远测试(因为在20秒可以测两个人，所以完成20人测试只需200秒，加上录入时间也不过205秒)。同理可得在210秒内可以完成肺活量测试。显然也能完成身高体重和握力测试。对测试场地的要求：只要测试场地的容量不小于人数最多的班级的人数即可。如果允许一个班的学生分几组进场测试，这样可以大大减少平均等待时间，但不会过多的减少总测试时间。该模型可以推广到如单位组织员工体检和一些文体活动的安排，以及若干项资料信息收录的时间安排。

参考文献：

[1] 王兵团. 数学建模基础[M]. 北京：清华大学出版社，2004年
[2] 姜启源. 数学模型(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2003年
[3] 朱道元. 数学建模案例精选[M]. 北京：科学出版社，2003年

Arrangement of the Physical Ability Test

CUI Guo-fu, LIU He, HAO Peng-zhi
Advisor: ZHENG Zhi-gang

(Shijiazhuang Institute of Railway Technology, Shijiazhuang 050041)

Abstract: This paper analyzes the time arrangement problem of a physical ability test carried out on some school students. By applying the principal that the main factor has to be held in solving a multi-factor problem, it points out the key problem in of arranging a physical ability test plan, we find out the method to make the average waiting time of each student the shortest under the condition of completing the entire test in the minimal time periods. We find that the minimal average waiting time is 6.22 minutes, and design out the testing project and time table. According to the plan mentioned above, when the number of the stair testing instrument increases one time, every 40 students can be tested in a turn. And the long jump testing instrument and the vital capacity testing instrument should also increase one time. Nevertheless, the height and weight measurement instrument can be cut down one, the number of power gripping measurement instrument is invariable.

Keywords: time section; average waiting time; testing process

第24卷 增刊2 工 程 数 学 学 报 Vol. 24 Supp.2
2007年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0151-09

体能测试时间安排

徐贵阳， 张 磊， 任海威

指导教师： 指导教师组

(空军雷达学院，武汉 430019)

编者按：该参赛论文首先将时间段数最少问题转化为装箱问题。分析讨论了以班为单位独立测试和前后两个班混合衔接测试两种情况，采用近似算法给出了近似解并证明其为最优解。其次，明确了学生等待时间的含义，给出了等待时间的表达式，并给出了一个可节省学生等待时间的测试方案。该参赛论文建模思路非常清晰，分析细微严密，写作条理清楚，对专科学生来说，能用装箱问题来处理是难得的。可能是时间上的原因，该参赛论文未能将问题讨论完全。比如在班衔接的情况下学生等待时间的讨论不完全，同时未计算给出等待时间。

摘 要：本文首先分析了一定数目的学生完成测试的最少用时问题。针对同一班级学生和不同班级学生两种情况，分别给出了完成测试的最少用时的表达式以及相应的测试方法。在此结果下，完成所有班级测试的最少时间段问题，就转化为一个装箱问题(“班级隔离”情况)，或者存在体积“变形”类似装箱问题(“班级交错”情况)。进而，使用 FFD 算法和改进的 FFD 算法分别求出此二问题的近似解，然后通过最优性分析，证明得到的即是最优解。针对学生的等待时间，我们分析给出了20人一组测试方法，该方法可以大大减少学生的等待时间。最终，使用该方法给出了56个班级在3个上午完成测试的时间安排和相应的测试指南。

关键词：装箱问题；FFD 算法；*NP* 难题

分类号：**AMS**(2000) 90b22 **中图分类号**：O223 **文献标识码**：A

1 模型假设

1) 一个班级的学生同时来到测试场所，做完所有测试项目的学生随即离开测试场所(同进随出)；

2) 一个班级同学在安排测试时间到场即可，不要求提前到场；

3) 在所有的测试时间段内，学生的测试过程都是顺利进行的，不会出现任何故障(工作人员不准时上班、仪器的维护与修理、一个学生对同一个项目测试多次等)；

4) 学号相连只是对每个班级内部而言，两个不同班级的学生之间不存在学号相连的情况；

5) 一个学生群体的测试时间是指从有一个学生开始测试到所有学生完成测试之间的时间。

2 符号说明

m_i：班级 i 的人数	$T_{台阶闲置}$：台阶未工作的时间
i：表示第 i 个班级	$T_{体能测试}$：体能测试所需要的时间
j：表示第 j 个时间段	$T_{台阶测试}$：台阶测试最少所需要的时间
s_j：时间段 j 的测试时间	$T_{台阶录入}$：台阶录入所需要的时间(定值5″)
t_w：每个学生的等待时间	t_p：学生从进场到离场之间的时间
T_w：每个班级的总等待时间	t_i：班级 i 独立进行体能测试所需要的最少时间

t：完成所有测试所需要的天数 t'_p：学生进行五个项目测试与仪器的接触时间

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{班级 } i \text{ 不在时间段 } j \text{ 测试}\\ 1, & \text{班级 } i \text{ 在时间段 } j \text{ 测试}\end{cases}$$

3 问题分析

1. 最少时间段问题

求测试完各个班级所用最少时间段问题，其核心是探讨学号连续或分段连续的一定数目的学生完成测试的最短用时问题。在探讨清楚这一最短用时问题后，那么最少时间段问题也就转化为一个装箱问题或类似装箱问题，用规划软件或装箱问题的算法，即可求解出结果。

2. 等待时间问题

节省等待时间是在测试所需时间段最少的条件下进行的，所以，应当使用最少时间段问题求解出的结论，在时间段最少的条件下，去探讨班级之间及班级内部的测试方案，来使学生的等待时间最少。从等待时间的定义出发，应当去探讨如何使学生尽快做完所有测试的方法。

3. 最少测试用时问题

通过分析发现，学号连续或分段连续的一定数目的学生测试的用时，主要取决于台阶试验的测试用时。通过对台阶测试及其它四项测试的分析，可以给出最少测试用时的函数表达式。

4 模型的建立与求解

4.1 最少测试用时问题

要探讨各班完成测试所需要最少时间段，需要首先探讨学号连续或分段连续的一定数目的学生完成测试的最短用时问题。

最少测试时间，就是测试完一定人数的学生所需要的最短时间。针对不同的情况，最少测试时间函数也是不同的。下面分别对两种情况进行分析和求解。

1) 学号连续的 n 个学生的最少测试时间

结论一 n 个连续学号学生的最少测试时间(单位：秒)

$$T_{\text{体能测试}}=\left\lceil\frac{n}{10}\right\rceil\times 210+5.$$

分析

1〉 n 个连续学号的学生要完成台阶测试最少所需时间(单位：秒)为

$$T_{\text{台阶测试}}=\left\lceil\frac{n}{10}\right\rceil\times 210+5.$$

证明略

2〉 学号连续的10个人可以在210秒内完成其他四个项目测试。其具体安排如表1：

3〉 由1〉、2〉两步可以知道，台阶测试以10人为单位，测试时间至少为210秒，而10人完成其它四个项目的测试不超过210秒。所以，n 个连续学号学生的体能测试时间就是其台阶测试时间，即 $T_{\text{体能测试}}=T_{\text{台阶测试}}$。因此，结论一是成立的。

2) 学号分段连续的 n 个学生的最少测试时间

分 k 个段连续，就是把 k 个班级融和到一起。假设这 k 个班级的人数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$，则 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$。

表1：10个人在210秒内完成前四个项目测试的具体安排

身高体重	■	2		3																										
	■	4		5		6																								
	■	7			8		9		10		■	1																		
跳远	■	1				2				3				4				5		6		7		8		9		10		
肺活量	■	6				7				8				9				10		■	1		2		3		4		5	
握力	■	8				■	1				2			3																
	■	9			10			■	4			5			6			7												
时间轴(秒)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
——框内数字表示学号　黑框表示录入时间																														

结论二　分 k 段连续的 n 个学生的最少测试时间为(单位：秒)

$$T_{体能测试}=\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{m_i}{10}\right\rfloor\right)\times215+\left(\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{m_i}{10}\right\rfloor\right)\times210+k\times5-\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rfloor\right)\times5,$$

其中 $\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil$ 表示对 n 个学生所分的组数；$\lfloor\frac{m_i}{10}\rfloor$ 表示班级 i 的学生能分配为10个学生一组的组数；$\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\lfloor\frac{m_i}{10}\rfloor$ 表示 n 个学生中出现交错分组的组数；但可能出现由最后班级不足10人所组成的尾巴组情况，尾巴组出现的次数可表示为 $\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rfloor\right)$。

4.2　最少时间段问题

对于求一定数目班级的最少测试时间段的问题，分下面两种情况进行考虑：

“班级隔离”：一个班级的所有同学都完成测试后，才展开下一个班级的测试；

“班级交错”：允许不同班级的学员组合交错测试。

下面，分别在这两种假设下给出计算最少时间段的模型。

4.2.1　“班级隔离”模型的分析与建立

经简单分析，即可知所需时间段不会超过9个。

以时间段数为目标函数，考虑上下午时间段长度约束和同一班级必须在一个时间段内测完的约束，即得下面优化模型。

模型一

$$\min\sum_{j=1}^{9}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{56}x_{ij}\cdot t_i\le T_j,\quad j=1,2,\cdots,9,\\ \sum_{j}^{9}x_{ij}=1,\\ x_{ij}=\begin{cases}1,\\0,\end{cases}\qquad i,j,k\subset \mathrm{N}^{+},\ i\le 56,\ j\le 9,\ k\le 5,\end{cases}$$

分析该模型，将上午时段和下午时段分别看作两个大小不同的箱子，将班级 i 的最少测试时间 t_i 视为该物体的体积，那么上面的问题就可视为一个装箱问题。而我们知道，装箱问题

是一个 NP 难题，不存在多项式精确的算法，只能寻找近似算法。FFD 算法是装箱问题性能比较好的算法。所以，我们尝试采用 FFD 算法[1]来解决我们的问题。

算法：

第一步：将班级所需要的时间 t_i 按从大到小排序；编号为：$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n$；

第二步：将时间段编号，顺序排好：B_1、B_2、B_3、$\cdots$ (其中，B_t 表示第 t 天的上午段)；

第三步：将 u_1 装入剩余空间不小于 u_1 的标号最小的箱子；

...

第 $(i+2)$ 步：将 u_i 装入剩余空间不小于 u_i 的标号最小的箱子；

...

第 $(n+2)$ 步：将 u_n 装入剩余空间不小于 u_n 的标号最小的箱子。

该算法的时间复杂度 $O(n^2)$，其中排序的时间复杂度 $O(n\cdot\ln n)$。

算法求解：

把 FFD 算法用 C 语言编程实现，得到所需要的时间段数为 $M=4$，也就是在4个上午时间段内完成所有学生的测试。由此算法只能求出每个时间段内所测试的班级号，而不能得出在某个时间段内这些班级测试的先后顺序。

模型一改进：

考虑到实际测试中一般上下午连续进行，体现为上午时间段个数与下午时间段个数最多相差一，据此在模型一中加入时间段连续约束

$$-1 \leq \sum_{k=1}^{5}\mathrm{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{i(2k-1)} - \sum_{k=1}^{4}\mathrm{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{i(2k)} \leq 1, \qquad k=1,2,3,4,$$

得到的模型记为模型一′。

再用 FFD 算法对模型一′求解。此时只需将模型一算法中第二步改为：“将时间段编号，顺序排好：B_1、B_2、$B_3\cdot\cdots\cdot$(其中，B_{2t-1} 表示第 $(2t-1)$ 天的上午段，B_{2t} 表示第 $(2t)$ 天的下午段)”。同样用模型一′可以求得所需要的时间段数为 $M=4$，也就是在连续两天的4个时间段内完成所有学生的测试。

表2: 四个段分别分配的班级号

	测试的班级号	所需总时间
第一天上午	1 2 3 4 6 7 8 13 14 15 16 31 33 54	14910(秒)
第一天下午	10 37 41 44 45 46 47 48 49 50 51	11340(秒)
第二天上午	5 11 12 19 20 21 22 26 29 30 32 34 38 39 40 42 43 53	14700(秒)
第二天下午	9 17 18 23 24 25 27 28 35 36 52 55 56	6510(秒)

最优性分析：

FFD 算法是一个近似算法，但通过下面分析可知，求得了最优解。

1) 估算出所需的时间段数 $M=4$

假设所有班级都是连续测试的，根据结论一算出每个班级的最少测试时间，得到56个班级都测完所需要的总时间为：$47460/3600 = 13.1833$ (小时)。而由题目的条件知，上午和下午的测试时间分别为 4.6667、3.250 (小时)。从这些数据中，我们可以大致的计算出所需的天数 $t = 13.1833/(4.6667+3.250) \approx 2$。进一步考虑到，在两天内的3个时间段的测试时间

为 $t_1 = 4.6667 \times 2 + 3.250 = 12.5834 < 13.1833$，不能满足上述段数最少的要求。所以，要使所有班级都测试完至少需要 4 个时间段。

2) 上面体能测试的 FFD 算法已求解得出所需要的时间段数为 $M = 4$

由上述 1)、2) 分析知，时间段数 $M = 4$ 即为最优解。

4.2.2 “班级交错”模型的分析与建立

我们发现模型一存在下述情况：当班级人数 N 不是 10 的整数倍时，将可能会导致最后的一个批次测试的人数少于 10 人，却用了测试 10 人所需的时间。这不利于测试仪器发挥其最大效率。因此测试时允许班级间进行衔接测试，从节省测试时间的角度来说，应当更为合理。

由结论二可以给出允许“班级交错”时 k 个班级完成测试的最少时间 $T_{体能测试}$。

与模型一相同，我们以测试时间段最少为目标，考虑上下午时间段长度约束和同一班级必须在一个时间段内测完的约束，可以得到如下模型。

模型二：

$$\min \sum_{j=1}^{9} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{56} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} s_j \le T_j, & j = 1, 2, \cdots, 9, \\ \sum\limits_{j}^{9} x_{ij} = 1, & \\ x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} & i, j, k \subset \mathrm{N}^+,\ i \le 56,\ j \le 9,\ k \le 5. \end{cases}$$

该问题可以看成是一个存在“变形”的装箱问题，其中“变形”意味着装入箱子的物品体积随装入箱子的不同而不同，这一体积可以通过 $T_{体能测试}$ 的表达式计算出来。因此，我们仍然可以采用 FFD 算法的思想解决这类问题，只需将 FFD 算法第 $(i+2)$ 步改为：若 u_i 装入能容纳其变形体积后标号最小的箱子中，其中变形体积由 $T_{体能测试}$ 的计算公式得来。该算法复杂度与 FFD 比较接近，即 $O(n^2)$。

把改进的 FFD 算法用 C 语言编程实现，得到此时所需要的时间段数 $M = 3$，也就是可以在三个上午时间段内完成所有学生的测试，具体分配如下表。由于 FFD 算法是一个近似算法，即是启发式算法，可以迅速得到满意解，但不一定是最优解。所以我们同样对算法结果进行了最优分析(方法与模型一中相同)。分析得出此时 3 个时间段就是最优解。

表3: 3 个时间段班级的分配情况

	测试的班级号
第一天上午	1 5 8 16 17 23 24 26 27 30 34 38 39 40 41 43 44 46 51 56
第二天上午	2 3 4 7 12 13 14 15 18 25 28 29 31 42 45 49 53 55
第三天上午	6 9 10 11 19 20 21 22 32 33 35 36 37 47 48 50 52 54

4.3 学生等待时间问题

现在在整个测试时间段数 $M = 3$ 的条件下，考虑使得全体学生等待时间最少的安排方法。在班级间可衔接的情况下，由同进随出的假设知，学生的等待时间 $t_w = t_e - t_o - t'_p$ (其中，t_e 表示该学生的离场时间，t_o 表示该学生的进场时间，t'_p 表示学生与仪器接触的时间)。因为同一个班级的进场时间 t_o 相同，且每个学生与仪器接触的时间 t'_p 相同，则同一班级学生

的等待时间完全由其离场时间 t_e 决定。所以要使等待时间最少只需使学生尽早做完五项测试离场即可。

第 i 班学生总的等待时间为：$T_w(i)=\sum t_w$。

所有班级学生总的等待时间为：$\sum\limits_{i=1}^{56} T_w(i)$。

那么我们求最少等待时间的问题就可以表示成下面的规划形式：

目标函数：所有班级学生总的等待时间最小：$\min\sum\limits_{i=1}^{56} T_w(i)$。

约束条件：测试所需要的段数为3个上午：$M=3$。

由于模型中的目标函数相当复杂，无法直接用程序求解。因此我们设计了求模型近似解的算法。

算法设计思路：

我们注意到测试中有下面的情况：

对于20名学号连续的学生，下面的排序方法可以保证在425秒之后，20个人可以全部离场，显然这是对20人的最优安排方案。

表4:　425秒内20个人的最优分配方案

身高体重		17		18																																						
		19		20			6																																				
		7			8		9		10			16																															
跳远		16				17				18				19				20					6				7				8				9				10				
肺活量		6				7				8				9				10					16				17				18				19				20				
握力		8					16			17			18																														
		9			10				19			20				6			7																								
台试测试		1~5																																									
		11~15																																									
时间(秒)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95		105		115		125		135		145		155		165		175		185		195		205		215

身高体重		2		3																																						
		4		5			11																																		
		12			13		14		15			1																													
跳远		1				2				3				4				5					11				12				13				14				15			
肺活量		11				12				13				14				15					1				2				3				4				5			
握力		13					1			2			3																												
		14			15				4			5				11			12																							
台试测试	6~10																																									
	16~20																																									
时间(秒)		225		235		245		255		265		275		285		295		305		315		325		335		345		355		365		375		385		395		405		415		425

基于此，我们可以考虑在测量中采用20人一组的方式进行，每20人都采用如上表的测试方法来测试。我们把 k 个班级衔接后看作一个总人数为 $\sum\limits_{i=1}^{k} N_i$ 且学号有 $(k-1)$ 次间断的整体。相应可以得到 k 个班级在这种20人一组测试方式最少测试所用时间的计算公式

$$t'=\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{20}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{N_i}{20}\right\rfloor\right)\times 430+\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{N_i}{20}\right\rfloor\times 425+5\times k-\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{20}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{20}\right\rfloor\right)\times 5,$$

用20人一组的测试方法对由求最少时间段所给出的分组方案进行测试，可能会出现在规定时间段内无法完成测试时间任务的情况，为此我们考虑将测试任务在各时间段的总时间尽量平均分配，以便各段匀出“空闲”，而后再进行20人一组的测试分配。

得到节省学生等待时间的测试时间安排方案的步骤：

第一步：用相应的FFD算法求出完成测试所需的最少时间段数，得到最少时间段数是3个上午时间段。

第二步：求取一组满足最少3个时间段条件下的各时间段内班级分布情况。

我们考虑到之后在处理等待时间最少的问题时，对班级间顺序及衔接调整处理时将会使 $T_{\min}$ 值有所扩大，所以现在添加使三个 $T_{\min}$ 间的方差最小这个约束条件来尽量保证三者拥有等量的“空闲”时间，然后再用lingo进行求解[2]。得到班级的初步分配情况。

第三步：按如下原则进行排序，使得总的等待时间尽可能小(记20人为一个批次)。

原则一：人数为 N 的班级在衔接后最好不要出现在 $\lceil \frac{N}{10} \rceil + 1$ 个批次内。

原则二：同一个批次内最好不要出现三个班或更多班同时在场的情况。即一个批次内不能出现两次以上的衔接情况。

原则三：为了满足以上两原则，允许批次内出现不足20人的情况。

原则四：允许对表(五)中的班级在时段之间进行微量调整。

原则五：调整后必须满足各段的总测试时间不大于时间段的时长(15000秒)。

考虑尽量节省学生的等待时间，采用20人一组的处理测试方法及步骤，最终得到56个班级的测试时间安排表如表5。

表5: 56个班级的测试时间

第一天上午		第二天上午		第三天上午	
班号	到达时间	班号	到达时间	班号	到达时间
17	8:00	8	8:00	35	8:00
27	8:07	42	8:07	36	8:07
16	8:14	31	8:21	9	8:14
26	8:28	53	8:35	11	8:21
39	8:42	7	8:49	47	8:28
46	8:49	55	8:56	52	8:49
1	9:11	18	9:11	48	8:49
40	9:25	25	9:25	20	9:11
56	9:39	2	9:32	37	9:18
51	9:39	29	9:46	6	9:39
5	10:00	45	10:00	32	9:53
30	10:07	12	10:14	33	10:07
41	10:22	13	10:29	50	10:22
38	10:36	28	10:43	54	10:43
43	10:50	3	10:57	49	11:04

表5: 56个班级的测试时间的表续

第一天上午		第二天上午		第三天上午	
班号	到达时间	班号	到达时间	班号	到达时间
44	10:57	4	11:11	21	11:25
23	11:18	14	11:33	22	11:40
24	11:26	15	11:47	10	11:54
34	11:40				
19	11:54				
14915秒		14915秒		14905秒	

测试方法指南:

基本方法为20人一组的测试方法，即按照表5所示班级顺序，依次取20人参加测试。同时请注意表6中的班级不和前一个班级组合测试，也就是说前一个班级的最后一组人数如果不足20人，也作为一组进行测试。

表6: 不和前一个班组合测试的班

班级	2	3	5	6	10	13	14	19	21	22	23	33	34	41	43	45	54
前一组空缺人数	1	11	1	1	2	5	12	1	1	2	3	3	7	1	1	3	4

4.4 测试安排计划的说明

从表5中，我们可以看出：第一，56个班级测试所用时间段为3个上午。而由模型2的求解结果，我们知道这56个班级完成测试最少需要3个上午的时间段，所以表4的分配方案满足时间段最少的条件；第二，从表5中最后一行数据可以看到，每个时间段的测试时间都小于4小时10分，所以时间段的约束满足；第三，从表5很容易看出，同一班级的学生可以在同一时间段内完成测试；第四，从与表5对应的测试方法指南中，我们可以看到，充分利用了20人一组的测试法。而有前面的分析可以知道，20人一组的方法大大的减少了学生的等待时间。综上所述，我们给出的模型都满足题目要求。

5 对体能测试的建议

引进仪器的数量分析:

引进原则：使各项目的平均个人测试时间差别最小(即方差最小)。

原则的分析：采用边际分析的方法。引进仪器的目的是为了增加单位时间所有测试项目完成人数，而制约该人数的瓶颈因素是测试最慢的项目。当前测试最慢的项目是台阶测试，因此要引进仪器，必然首先引进台阶测试仪器，直到台阶测试不是最慢的项目。而肺活量和握力又成为新的瓶颈项目。依此思路，进行下去即可得到引进原则：使各项目的平均个人测试时间相等。在此原则下，学校应按照身高与体重：立定跳远：肺活量：握力：台阶=10：20：20：15：42 的比例引进最好。

测量场所人员容量的分析:

根据模型“同进随出”的假设，在任何的一个时刻，这个测试场所中的班级数都不会超过2。再根据题目给出的班级人数知，人数最多的两个班级的人数之和也不超过测试场所的容量150人，也就是说，测试场所容量不会起到限制作用。所以，容量对我们建立的模型没有影

响。另一方面讲，学校想通过改变测试场所容量来减少时间段数和节省学生的等待时间是不可行的。

班级学生分组测试：

20人一组的测试方法可以大大减少学生的等待时间，但是如果仅仅是在测试场上对学生进行分组，那么仍然要求一个班级的所有学生都需要到达，可能存在很多同学等待其他同学的问题。从节省学生的等待时间考虑，可以将学生按照学号顺序，20人一组提前分组，同一组的学生一起到达测试场地，不同组学生按照大概6分钟一组的时间，顺次到达。

参考文献：

[1] 张立昂. 现代数学手册·计算机数学卷·组合优化的近似算法[M]. 北京：清华大学出版社，2002, 3

[2] 谢金星，薛毅. 优化建模与lingo/lindo软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005, 7

The Arrangement of Physical Fitness Testing Time

XU Gui-yang, ZHANG Lei, REN Hai-wei

Advisor: Instructor Group

(Air Force Radar Academy, Wuhan 430019)

Abstract: In this paper, the minimal testing time for a fixed number of students is analyzed at first. Aimed at students from the same class and different classes, mathematical expressions for the testing time are presented respectively. Consequently, the least time section problem becomes a bin packing problem ("classes isolated") or a bin packing problem with "volume deformation" ("classes linked"). The FFD algorithm and the improved FFD algorithm are adopted and approximation solutions to the problems are obtained respectively. Through optimal analysis, we give the optimal solutions. To reduce the students' waiting time, we present a testing method that twenty students as a group would be tested in one time. Finally, a testing schedule of the 56 classes and the corresponding testing guide are given.

Keywords: bin packing problem; FFD algorithm; NP-hard problem